

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MARIANA KLEINA

O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES APLICADO AO PROBLEMA DO
DESPACHO HIDROTÉRMICO

CURITIBA

2012

MARIANA KLEINA

O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES APLICADO AO PROBLEMA DO
DESPACHO HIDROTÉRMICO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, linha de pesquisa em Otimização, do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli

CURITIBA

2012

TERMO DE APROVAÇÃO

MARIANA KLEINA

O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES APLICADO AO PROBLEMA DO DESPACHO HIDROTÉRMICO

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

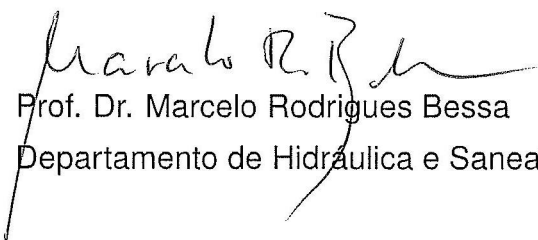
Orientador:



Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli
PPGMNE, UFPR



Prof. Dr. Esdras Penêdo de Carvalho
Departamento de Matemática, UEM



Prof. Dr. Marcelo Rodrigues Bessa
Departamento de Hidráulica e Saneamento, UFPR

Curitiba, 27 de fevereiro de 2012.

Dedico este trabalho à meus pais, Aleixo e Dirlei, exemplos de caráter para a humanidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que proporciona este momento na minha vida, pois sei que sem o Seu consentimento, nada poderia ter realizado.

Ao professor Luiz Carlos Matioli, pela orientação, incentivo, apoio, dedicação, confiança e sempre acreditar que eu seria capaz de alcançar meus objetivos.

À Débora Cintia Marcilio, muito atenciosa e prestativa, sempre disposta a ajudar. À Ana Paula Oening, por sua singular contribuição neste trabalho.

Aos meus pais Aleixo e Dirlei e meus irmãos Leandro e Monica, pelo apoio, carinho e compreensão.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram nessa jornada, em especial à Aline e à Priscila. Aos meus colegas de sala, Juliana, Samylla e Wyrllen. Às colegas de trabalho, Gisele e Inajara, pela fundamental contribuição na realização deste trabalho. Ao pessoal do CESEC e à Maristela, muito querida e prestativa. Aos professores do PPGMNE, pelo aprendizado.

À ANEEL pelo financiamento do Projeto Estratégico de Pesquisa e Desenvolvimento - ANEEL PE-6491-0108/2009, "Otimização do Despacho Hidrotérmico", com o apoio das seguintes concessionárias: COPEL, DUKE, CGTF, CDSA, BAESA, ENER-CAN, CPFL PAULISTA, CPFL, PIRATININGA, RGE, AES TIETÊ, AES URUGUAIANA, ELETROPAULO, CEMIG e CESP.

Ao LACTEC, que me deu a oportunidade de participar do grupo de pesquisa juntamente com pesquisadores e professores renomados.

Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos
de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que
parecia impossível.

Voltaire

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade a aplicação do método de Pontos Interiores primal-dual com barreira logarítmica ao problema do despacho hidrotérmico, o qual tem por objetivo a otimização da operação das usinas de forma individualizada, visando contribuir para o planejamento e programação de operação de sistemas hidrotérmicos, em particular do setor elétrico brasileiro. Este problema é bastante desafiador no sentido de encontrar soluções, pois é um problema não-linear, não-convexo e de grande porte. A metodologia de Pontos Interiores consiste em transformar as restrições de desigualdade do problema em restrições de igualdade através do acréscimo de variáveis não-negativas. Estas são penalizadas através da função barreira logarítmica e do parâmetro barreira, incorporados na função objetivo do problema. Associa-se uma função Lagrangeana ao problema penalizado e as condições de primeira ordem são aplicadas, gerando um sistema não-linear, o qual é resolvido pelo método de Newton.

A principal contribuição do trabalho consiste em uma modificação na metodologia de Pontos Interiores, no sentido de desconsiderar o termo que envolve a matriz Hessiana da restrição não-linear, semelhante ao que é realizado pelo método de Gauss-Newton em programação não-linear. Devido ao fato dessa matriz ser muito esparsa, sua contribuição na resolução do sistema não-linear gerado pela metodologia de Pontos Interiores é pequena. Desta forma, ela pôde ser desprezada sem que os resultados finais fossem afetados, como comprovaram os exaustivos testes numéricos realizados. A metodologia proposta foi implementada em Matlab e aplicada em um sistema teste que procura reproduzir o sistema brasileiro considerando dois períodos distintos: excesso e falta de chuvas. Os resultados dos testes realizados até então são promissores o que encoraja novos estudos com a metodologia desenvolvida.

Palavras-chave: Despacho hidrotérmico. Modelagem matemática. Programação não-linear. Método de Pontos Interiores.

ABSTRACT

The main objective of this work is the application of the primal-dual Interior-Point method with logarithmic barrier function to the hydrothermal dispatch problem which is intended to optimize individual hydro power plants for the hydrothermal operational planning and programming, in particular the Brazilian electric power system. This problem is quite challenging in order to find solutions, because it is a nonlinear problem, nonconvex and of large scale. The Interior-Point method consists in transforming the inequality constraints in equality constraints by adding nonnegative variables. These variables are penalized by the logarithmic barrier function and the barrier parameter, which are incorporated to the objective function problem. It's associated the Lagrangean function to the penalized problem and applying the first order condition, a nonlinear system is generated, which is solved by Newton's method.

The main contribution of this work consists in modifying the Interior-Point method, disregarding the term involving the Hessian matrix in the nonlinear constraint, as in the Gauss-Newton method for nonlinear programming. As this matrix is very sparse, its contribution to solving the nonlinear system generated by the Interior-Point method is small. Thus, it could be ignored without affecting the final results, as confirmed by exhaustive numerical tests performed. The proposed methodology was implemented in Matlab and applied in a test system, which tries to replicate the Brazilian system, considering two different periods: high and low inflows. The tests results are promising encouraging new studies using the developed methodology.

Key-words: Hydrothermal dispatch. Mathematical modelling. Nonlinear programming. Interior-Point method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – O PROCESSO DE GERAÇÃO ENERGÉTICA ATRAVÉS DE UMA USINA HIDRELÉTRICA	31
FIGURA 2 – ESQUEMA DE GERAÇÃO A VAPOR NUMA USINA TERMELÉ-TRICA	32
FIGURA 3 – O DILEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS	36
FIGURA 4 – BALANÇO HÍDRICO	41
FIGURA 5 – LINHAS DE INTERCÂMBIO ENTRE OS SUBSISTEMAS	44
FIGURA 6 – RESTRIÇÃO DO BALANÇO HÍDRICO PARA UMA CASCATA COM 3 USINAS E 3 PERÍODOS	64
FIGURA 7 – DISTRIBUIÇÃO DAS USINAS HIDRÁULICAS POR SUBSISTEMA	69
FIGURA 8 – SUBSISTEMAS E LINHAS DE INTERCÂMBIO ENTRE ELES	70
FIGURA 9 – GERAÇÃO HIDRÁULICA DO SUBSISTEMA 5	71
FIGURA 10– BALANÇO HÍDRICO DO SUBSISTEMA 5	72
FIGURA 11– GERAÇÃO HIDRÁULICA DO SUBSISTEMA 1	72
FIGURA 12– BALANÇO HÍDRICO DO SUBSISTEMA 1	73
FIGURA 13– GERAÇÃO TÉRMICA DO SUBSISTEMA 1	73
FIGURA 14– GERAÇÃO HIDRÁULICA DO SUBSISTEMA 2	74
FIGURA 15– BALANÇO HÍDRICO DO SUBSISTEMA 2	74
FIGURA 16– GERAÇÃO TÉRMICA DO SUBSISTEMA 2	75
FIGURA 17– INTERCÂMBIO DE ENERGIA ENTRE OS SUBSISTEMAS 1 E 2 .	75
FIGURA 18– ENERGIA ENVIADA DO SUBSISTEMA 5 PARA O SUBSISTEMA 1	76
FIGURA 19– ENERGIA ENVIADA DO SUBSISTEMA 5 PARA O SUBSISTEMA	

2	76
FIGURA 20– BALANÇO DE ENERGIA E DEMANDA DO SUBSISTEMA 1	77
FIGURA 21– BALANÇO DE ENERGIA E DEMANDA DO SUBSISTEMA 2	77
FIGURA 22– GERAÇÃO HIDRÁULICA DO SUBSISTEMA 5	78
FIGURA 23– BALANÇO HÍDRICO DO SUBSISTEMA 5	78
FIGURA 24– GERAÇÃO HIDRÁULICA DO SUBSISTEMA 1	79
FIGURA 25– BALANÇO HÍDRICO DO SUBSISTEMA 1	79
FIGURA 26– GERAÇÃO TÉRMICA DO SUBSISTEMA 1	80
FIGURA 27– BALANÇO DE ENERGIA E DEMANDA DO SUBSISTEMA 1	80
FIGURA 28– GERAÇÃO HIDRÁULICA DO SUBSISTEMA 2	81
FIGURA 29– BALANÇO HÍDRICO DO SUBSISTEMA 2	81
FIGURA 30– GERAÇÃO TÉRMICA DO SUBSISTEMA 2	82
FIGURA 31– BALANÇO DE ENERGIA E DEMANDA DO SUBSISTEMA 2	82

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– RESUMO DA GERAÇÃO HIDRELÉTRICA NO BRASIL	33
TABELA 2	– DIMENSÃO DAS VARIÁVEIS DO PROBLEMA DO DESPACHO HIDROTÉRMICO	62
TABELA 3	– USINAS E DEMANDAS PARA O SISTEMA CONSIDERADO	70

LISTA DE SÍMBOLOS

A : matriz dos coeficientes da restrição linear de igualdade do problema
 b : vetor constante da restrição linear de igualdade do problema
 CD_s : função de custo de déficit do subsistema s
 CT_j : função de custo da térmica j
 C : matriz dos coeficientes da restrição linear de desigualdade do problema
 c : vetor constante da restrição linear de desigualdade do problema
 c_r : coeficiente de perdas hidráulicas da usina r
 d : vetor de direções de Newton
 dk : direção de Newton em k , $k = x, w, y, z$
 $d\lambda_k$: direção de Newton em λ_k , $k = 1, \dots, 5$
 D : demanda de energia
 DEF : déficit de energia
 e_1 : vetor com componentes de uns de tamanho p
 e_2 : vetor com componentes de uns de tamanho n
 $F1 - F9$: vetores constantes do sistema de Newton
 f : função objetivo do problema
 g : restrição não-linear do problema
 \bar{g} : aceleração da gravidade
 GT : geração térmica
 GT_{max} : geração térmica máxima
 GT_{min} : geração térmica mínima
 GH : geração hidráulica
 $HLiq$: altura de queda líquida
 $HBruta$: altura de queda bruta
 I : número total de linhas de intercâmbio do sistema
 INT : intercâmbio de energia
 INT_{max} : intercâmbio máximo de energia
 INT_{min} : intercâmbio mínimo de energia
 I_d : matriz identidade
 I_s : conjunto de linhas de intercâmbio do subsistema s
 J : número total de usinas térmicas do sistema
 J_g : matriz Jacobiana da restrição g
 J_s : número de usinas térmicas do subsistema s
 j : índice que denota a usina térmica

k : contador de iterações
 k_r : produtividade específica da usina r
 l : limite inferior de x
 M_r : conjunto de reservatórios a montante do reservatório r
 n : dimensão de x
 p : número de restrições lineares de igualdade e desigualdade
 pc : perdas de carga hidráulica
 Q : vazão total do reservatório
 QC : vazão vertida
 QC_{max} : vazão vertida máxima
 QC_{min} : vazão vertida mínima
 QVT : vazão turbinada
 QVT_{max} : vazão turbinada máxima
 R : número total de reservatórios do sistema
 R_s : número de usinas hidráulicas do subsistema s
 r : índice que denota o reservatório
 S : número total de subsistemas
 $Smês$: quantidade de segundos no mês
 s : índice que denota o subsistema
 T : último período do horizonte de otimização
 t : índice que denota o período
 u : limite superior de x
 V : volume do reservatório
 V_{max} : volume máximo do reservatório
 V_{med} : volume médio do reservatório
 V_{min} : volume mínimo do reservatório
 W : matriz com diagonal formada pelos elementos de w
 W^{-1} : matriz com diagonal formada pelos elementos de w^{-1}
 w : variável de folga
 $Y_{r,t}$: afluência natural ao reservatório r no período t
 Y : matriz com diagonal formada pelos elementos de y
 Y^{-1} : matriz com diagonal formada pelos elementos de y^{-1}
 y : variável de folga
 Z : matriz com diagonal formada pelos elementos de z
 Z^{-1} : matriz com diagonal formada pelos elementos de z^{-1}
 z : variável de folga
 α_p : comprimento do passo primal
 α_d : comprimento do passo dual
 β : parâmetro de centralização

γ : gap de complementaridade

δ : fator de segurança

$\eta_r^{médio}$: rendimento médio da usina r

θ : polinômio de cota de jusante

Λ_k : matriz com diagonal formada pelos elementos de λ_k , $k = 1, \dots, 5$

λ_k : multiplicadores de Lagrange, $k = 1, \dots, 5$

ρ : parâmetro barreira

ρ_a : massa específica da água

τ : taxa de desconto

ϕ : polinômio de cota de montante

ω : coeficiente de atualização do valor presente

∇f : gradiente da função f

$\nabla^2 f$: matriz Hessiana da função f

$\nabla^2 g$: matriz Hessiana da função g

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	ESTRUTURA DO TRABALHO	20
2	REVISÃO DE CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO	21
2.1	PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR RESTRITO	21
2.2	MÉTODOS DE PENALIZAÇÃO E BARREIRA	23
2.3	MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES	26
2.4	MÉTODOS QUASE-NEWTON	27
3	O PROBLEMA DO DESPACHO HIDROTÉRMICO BRASILEIRO	29
3.1	O SISTEMA INTERLIGADO NACIONAL E O PLANEJAMENTO	30
3.1.1	Breve Histórico	30
3.1.2	Geração Hidrotérmica	30
3.1.3	Características do Sistema Atual	32
3.1.4	Despacho Centralizado	34
3.1.5	Planejamento da Operação no Aspecto Energético	34
3.2	MODELAGEM MATEMÁTICA	35
3.2.1	Função Objetivo	37
3.2.2	Restrição de Atendimento à Demanda	38
3.2.3	Restrição de Balanço Hídrico	40
3.2.4	Restrição de Defluência Mínima	41
3.2.5	Restrição de Limite das Variáveis	42
3.2.6	Modelo Matemático	44
4	O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES	46
4.1	ESTADO DA ARTE	46

4.2 O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES PRIMAL-DUAL COM BARREIRA LOGARÍTMICA	49
4.2.1 Função Lagrangeana	50
4.2.2 Condições de KKT	51
4.2.3 Método de Newton	52
4.2.4 Atualização das Variáveis	55
4.2.5 Tamanho do Passo	55
4.2.6 Atualização do Parâmetro Barreira	56
4.3 METODOLOGIA PROPOSTA	57
4.4 ALGORITMO DE PONTOS INTERIORES	61
5 DETALHES DE IMPLEMENTAÇÃO	62
5.1 DIMENSIONAMENTO DAS VARIÁVEIS	62
5.2 MATRIZES E VETORES DO PROBLEMA	63
5.2.1 Restrição de Balanço Hídrico	64
5.2.2 Restrição de Defluência Mínima	67
5.2.3 Limite das Variáveis	68
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	69
7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	84
REFERÊNCIAS	86
APÊNDICE A – DERIVADAS ANALÍTICAS DAS FUNÇÕES ENVOLVIDAS	90
A.1 GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO	90
A.2 MATRIZ HESSIANA DA FUNÇÃO OBJETIVO	91
A.3 MATRIZ JACOBIANA DA RESTRIÇÃO DE ATENDIMENTO À DEMANDA ...	91
A.3.1 Derivada em relação a GT	92
A.3.2 Derivada em relação a INT	92
A.3.3 Derivada em relação a DEF	93
A.3.4 Derivada em relação a V	94

A.3.5 Derivada em relação a QVT	95
A.3.6 Derivada em relação a QC	95

1 INTRODUÇÃO

Fundamentalmente pode-se assumir que a energia elétrica brasileira é gerada por dois tipos de usinas: as hidrelétricas e as termelétricas. A primeira utiliza água como matéria-prima e a segunda utiliza fontes diversas, tais como óleo diesel, gás natural e biomassa. Existem outros tipos de usinas (eólica, solar) que compõem o sistema brasileiro, porém são insignificantes, em termos de volume e geração quando comparadas com as duas já mencionadas. O problema do despacho hidrotérmico consiste em definir quanto de energia será gerada pelas usinas hidrelétricas e termelétricas de forma que a demanda dos consumidores possa ser atendida com o mínimo custo possível. Parece óbvio que a utilização das usinas hidrelétricas traz maiores benefícios econômicos, já que a água não tem custo (ao contrário dos combustíveis utilizados nas termelétricas que têm alto custo operacional), porém sua operação exige um cuidadoso planejamento para conciliar os objetivos conflitantes de minimizar o desperdício de água (vertimentos) no período de chuvas e minimizar o risco de desabastecimento no período de seca. Há também as questões de que somente a geração hidrelétrica não supre completamente a demanda brasileira e que restrições ambientais devem ser respeitadas. Logo, é exigido um equilíbrio entre a geração termo e hidrelétrica em todas as usinas consideradas visando a operação como um todo.

A geração hidrotérmica traz riscos devido às incertezas nas afluências naturais (chuvas) e na demanda de energia. Logo, é essencial haver um modelo de otimização que tome a decisão mais apropriada para cada período considerado. No Brasil, o Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) desenvolveu softwares que o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) utiliza para determinar a operação econômica do Sistema Interligado Nacional (SIN). Porém, estes softwares, a saber o NEWAVE (médio prazo - cinco anos) e o DECOMP (curto prazo - um ano), foram desenvolvidos

quando o Setor Elétrico Brasileiro (SEB) era totalmente centralizado e estatal, onde reservatórios equivalentes são considerados, linearizações são feitas e os registros históricos de vazões são de baixa qualidade. Desse modo, surgiu a necessidade de se desenvolver um modelo de otimização para o despacho hidrotérmico, garantindo a oferta futura de recursos energéticos e atendendo a demanda do mercado com o menor custo possível.

As concessionárias COPEL, DUKE, CGTF, CDSA, BAESA, ENERCAN, CPFL PAULISTA e PIRATININGA, RGE, AES TIETÊ e URUGUAIANA, ELETROPAULO, CEMIG e CESP estão financiando um projeto de P&D estratégico com o tema “Otimização de despacho hidrotérmico através de algoritmos híbridos com computação de alto desempenho” com uma equipe formada por pesquisadores do Instituto de Tecnologia para o Desenvolvimento (LACTEC), professores e alunos de graduação e pós-graduação da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O modelo de otimização para o despacho hidrotérmico considerado neste trabalho foi desenvolvido com o mínimo de linearizações e simplificações possíveis, a fim de representar bem a realidade do problema. Por este motivo, o problema resultante é bastante desafiador em termos de resolução, pois é de grande porte, não-linear, não-convexo e com restrições de diversos tipos. O método de Pontos Interiores primal-dual com barreira logarítmica é o método adotado neste trabalho para resolução de tal problema. A seguir, é descrito brevemente o surgimento de tal método.

Os primeiros métodos de Pontos Interiores surgiram há mais de 50 anos. Muito sobre o assunto já foi estudado e sua teoria está bem desenvolvida. Variantes do método surgiram com o intuito de estendê-lo para resolver todos os tipos de problemas: de linear a não-linear, de convexo a não-convexo.

O primeiro método de Pontos Interiores conhecido é o método da Barreira Logarítmica, desenvolvido por Frisch (1955), que na década de 60 foi estudado exaustivamente por Fiacco e McCormick (1968) a fim de resolver problemas não-lineares com restrições de desigualdade. Porém, o uso da função barreira não era satisfatório

devido a problemas como: o mal condicionamento da matriz Hessiana da função barreira quando o parâmetro de penalidade (também conhecido como parâmetro barreira) tende a zero, a dificuldade na escolha do parâmetro barreira e de uma solução inicial, a não existência de derivada na solução e o aumento ilimitado da função barreira na vizinhança da fronteira.

De fato, o método de Pontos Interiores teve grande reconhecimento quando Karmarkar (1984) desenvolveu um algoritmo para resolver problemas de programação linear com complexidade polinomial, mostrando-se mais eficiente que o método simplex, que tem complexidade exponencial. O método de Karmarkar é um método primal (WRIGHT, 1997), isto é, descrito sem referência ao problema dual. A cada iteração, o método faz uma transformação projetiva do conjunto viável primal que leva a solução atual ao centro do conjunto e caminha no espaço transformado (KARMARKAR, 1984).

Com o estudo feito por Karmarkar, reapareceu o interesse em utilizar a função barreira, que passou a ser usada como ferramenta alternativa de trabalho e novos tipos de função barreira foram apresentadas. Polyak (1992) propôs o método da Função Barreira Modificada, cujo objetivo é combinar as melhores propriedades da função barreira clássica e da função Lagrangeana clássica. Mais detalhes sobre o método da Função Barreira Modificada pode ser encontrada no trabalho de Mariano (2006).

Com o bom desempenho do método de Pontos Interiores para programação linear, surgiu o interesse de estender esta classe de métodos para a programação não-linear. Como exemplo, pode-se citar os trabalhos de Akrotirianakis e Rustem (1997), El-Bakry *et al.* (1996), Granville (1994) e Vanderbei e Shanno (1999).

Os métodos primais-duais são os métodos de Pontos Interiores que possuem as melhores propriedades teóricas e práticas. Experimentos computacionais mostram que os métodos primais-duais são superiores aos demais métodos de pontos interiores em problemas práticos de grande porte (WRIGHT, 1997). Merecem destaque entre os métodos primais-duais, o método preditor-corretor de Mehrotra (1992), que utiliza aproximações de segunda ordem para a trajetória primal-dual, conforme sugere-

rido por Megiddo (1986). Além disso, o método parte de um ponto interior inviável, conforme implementado com sucesso por Lustig, Marsten e Shanno (1991).

O principal objetivo deste trabalho consiste na aplicação do método de Pontos Interiores primal-dual barreira logarítmica ao problema do despacho hidrotérmico, visando o mínimo custo de operação. É realizada uma simplificação na metodologia em que é desconsiderada a matriz Hessiana da restrição não-linear do problema, a qual justifica-se pelo fato desta matriz ser bastante esparsa, de difícil cálculo analítico e inviável cálculo aproximado. Com isso, pode-se provar analiticamente que o sistema de Newton gerado no método de Pontos Interiores tem solução, além de baixar consideravelmente o tempo de execução do algoritmo.

1.1 ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos que serão utilizados ao longo de todo o trabalho. No Capítulo 3 é feita uma breve descrição do sistema elétrico brasileiro e toda a modelagem matemática do problema hidrotérmico. No Capítulo 4 é apresentada uma pesquisa de trabalhos que utilizam a metodologia de Pontos Interiores em diversos problemas práticos e é desenvolvida a metodologia de Pontos Interiores primal-dual barreira logarítmica para o problema mostrado no Capítulo 3. O Capítulo 5 aborda detalhes de implementação. Finalmente, no Capítulo 6 é apresentada a discussão dos resultados obtidos na aplicação da metodologia de Pontos Interiores para dois períodos distintos.

2 REVISÃO DE CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO

No mundo atual, minimizar custos ou maximizar lucros, dependendo da dimensão do problema, pode representar grande ganho para uma empresa. A otimização surgiu para auxiliar na tomada de decisões de problemas presentes no dia a dia, não somente na área financeira, mas em diversos campos.

Um problema de otimização consiste em minimizar ou maximizar uma determinada função, chamada *função objetivo*, que obedeça determinadas condições, chamadas de *restrições*, aqui representadas pelo conjunto Ω . Matematicamente, um problema de otimização pode ser representado por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad f(x) \\ &\text{sujeito a : } x \in \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, diz-se que o problema (1) é *irrestrito*. Se a função objetivo e as restrições são lineares, tem-se um *problema de programação linear*. Caso uma ou mais funções do problema (função objetivo e/ou restrições) sejam não-lineares, diz-se que há um *problema de programação não-linear*.

Neste capítulo, será feita uma breve revisão de conceitos fundamentais para o desenvolvimento do presente trabalho. Como o interesse deste trabalho está em problemas não-lineares restritos, os conceitos revisados focar-se-ão especialmente nesta classe de problemas.

2.1 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR RESTRITO

Matematicamente, um problema de programação não-linear restrito pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && f(x) \\
& \text{sujeito a :} && g(x) = 0 \\
& && h(x) \leq 0
\end{aligned} \tag{2}$$

No problema (2), $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de decisão do problema, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a função das restrições de igualdade e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é a função de restrições de desigualdade. Para o desenvolvimento deste trabalho, as funções f , g e h devem ser funções contínuas com derivadas contínuas.

Definição 2.1.1 (*Região Viável*) A região viável Ω é o conjunto de pontos que satisfazem as restrições do problema (2), isto é, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0, h(x) \leq 0\}$.

Definição 2.1.2 (*Mínimo local*) x^* é um mínimo local do problema (2) se existe uma vizinhança V de x^* tal que $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in (\Omega \cap V)$.

Definição 2.1.3 (*Restrições ativas*) Dado um ponto $x \in \Omega$, uma restrição de desigualdade h_i é dita ativa em x se $h_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, p$. Caso $h_i(x) < 0$, diz-se que h_i é inativa em x .

$A(x)$ representará o conjunto de índices das restrições de desigualdade ativas em um ponto viável x , isto é, $A(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} | h_i(x) = 0\}$.

Definição 2.1.4 (*LICQ*) Dado um ponto $x \in \Omega$, as restrições satisfazem o requisito de independência linear em x (*LICQ* por sua sigla em inglês) se os gradientes das restrições de igualdade e de desigualdade ativas são linearmente independentes, isto é, o conjunto $\{\nabla h_i(x) | i \in A(x), \nabla g_i(x) | i \in \{1, \dots, m\}\}$ é linearmente independente.

Definição 2.1.5 (*KKT*) Seja $x \in \mathbb{R}^n$, as condições de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (*KKT*) em x são satisfeitas se existem vetores $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$ que verificam:

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x) = 0 \tag{3}$$

$$h_i(x)\mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (4)$$

$$g(x) = 0 \quad (5)$$

$$h(x) \leq 0 \quad (6)$$

$$\mu \geq 0 \quad (7)$$

Os vetores λ e μ são chamados de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 2.1.1 *Seja x um mínimo local do problema (2), onde se satisfaz o requisito LICQ, então as condições de primeira ordem de KKT no ponto x são satisfeitas e os vetores λ e μ são únicos.*

Prova: Ver em Nocedal e Wright (2006).

Definição 2.1.6 *(Função Lagrangeana) A função Lagrangeana para o problema (2) é a função $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:*

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x) \quad (8)$$

Assim, a equação (3) pode ser escrita de forma mais compacta como:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0 \quad (9)$$

Definição 2.1.7 *(Hessiana da função Lagrangeana) A matriz Hessiana da função Lagrangeana para o problema (2) é a função $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definida como:*

$$H(x, \lambda, \mu) = \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda, \mu) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla^2 h_i(x) \quad (10)$$

2.2 MÉTODOS DE PENALIZAÇÃO E BARREIRA

Sem dúvida, resolver um problema de programação não-linear restrito não é uma tarefa fácil e este campo de pesquisa cresce continuamente com o surgimento de novos trabalhos.

Existem várias categorias de métodos para resolver essa classe de problemas, dentre as mais conhecidas estão: programação quadrática sequencial, gradiente reduzido generalizado e métodos de penalização e barreira. Este último método será estudado neste trabalho. Os demais métodos podem ser encontrados em Friedlander (1994).

Considera-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a :} && g(x) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dado o problema acima, associa-se uma sequência de problemas irrestritos de modo que as soluções desses problemas se aproximem da solução do problema original.

O problema irrestrito associado tem como função objetivo:

$$\phi(x, \rho) = f(x) + \rho \sum_{i=1}^m (g_i(x))^2 \tag{12}$$

onde $\rho > 0$ é o parâmetro de penalidade. Quanto maior for o valor de ρ , maior é a penalização para $g_i(x)$ diferente de zero, para algum i .

Segundo Friedlander (1994), se ρ cresce indefinidamente, a solução de $\phi(x, \rho)$ será cada vez mais próxima da solução do problema (11).

A seguir, é apresentado um algoritmo para resolução de um problema de programação não-linear pelo método de penalização.

Algoritmo 2.2.1 Dado $\rho^0 \in \mathbb{R}$

Para $k = 0$

Enquanto não convergir (critério de parada não satisfeito)

Resolver o problema irrestrito:

minimizar $\phi(x, \rho_k)$

Escolher $\rho^{k+1} > \rho^k$

$k = k + 1$

Fim

Em Luenberger (2005), são apresentadas as propriedades básicas destes métodos e com hipóteses fracas é possível demonstrar que o algoritmo descrito acima converge à solução do problema original. Na prática, quando o parâmetro penalidade ρ é muito grande, os resultados computacionais obtidos na resolução dos problemas irrestritos associados podem não ser confiáveis (FLETCHER, 1986).

Os métodos de barreira são parecidos com os de penalização. São aplicados a problemas do tipo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && h(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

onde o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p\}$ deve ter interior não vazio, denotado por $\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n | h_i(x) < 0, i = 1, \dots, p\}$. Nos métodos de penalização, as aproximações sucessivas da solução não são viáveis, e nos métodos de tipo barreira, ao contrário, elas sempre são estritamente viáveis, ou seja, elas sempre estão em $\bar{\Omega}$. Por esse motivo, também são chamados *métodos de Pontos Interiores* (FRIEDLANDER, 1994).

O problema irrestrito associado ao problema (13) é:

$$\text{minimizar } f(x) - \rho B(x) \tag{14}$$

onde $B : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *função barreira* e obedece às seguintes propriedades (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995):

- i* $B(x)$ está definida e é contínua para todo $x \in \bar{\Omega}$;
- ii* $B(x) \geq 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$;
- iii* Se $\{x^k\} \subset \Omega$, $h(x^k) < 0$ para todo k e $\lim_{k \rightarrow \infty} h_i(x^k) = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, p\}$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} B(x^k) = \infty$.

A funções barreiras mais utilizadas para o problema (13) são:

- Barreira inversa:

$$B(x) = - \sum_{i=1}^p \frac{1}{h_i(x)} \quad (15)$$

- Barreira logarítmica:

$$B(x) = - \sum_{i=1}^p \ln\{-h_i(x)\} \quad (16)$$

2.3 MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

O método de Newton é um método iterativo que reduz a resolução de um sistema de n equações não-lineares com n incógnitas à resolução de uma sequência de sistemas de equações lineares. Boas referências para este método são Luenberger (2005), Martínez e Santos (1995) e Nocedal e Wright (2006).

Dada $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não-linear, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, deseja-se encontrar a solução de

$$F(x) = 0 \quad (17)$$

Supõe-se que F está bem definida e tem derivadas parciais contínuas em um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . $J(x)$ denotará a matriz das derivadas parciais de F , chamada *matriz Jacobiana*. Assim

$$J(x) \equiv F'(x) \equiv \begin{bmatrix} f'_1(x) \\ \dots \\ f'_n(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \dots \\ \nabla f_n(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Dada uma estimativa inicial x^0 para a solução, o método de Newton considera a cada iteração a aproximação

$$F(x) \approx L_k(x) \equiv F(x^k) + J(x^k) \underbrace{(x - x^k)}_{d^k} \quad (18)$$

e calcula d^k como solução do sistema linear $L_k(x) = 0$. Assim, se $J(x^k)$ é não singular, uma iteração do método de Newton pode ser descrita por:

$$J(x^k)d^k = -F(x^k) \quad (19)$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k \quad (20)$$

Se $J(x^k)$ é não singular e a estimativa inicial x^0 estiver suficientemente próxima da solução, tem-se que o método de Newton converge quadraticamente (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995).

2.4 MÉTODOS QUASE-NEWTON

Os métodos quase-Newton (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995; NOCEDAL; WRIGHT, 2006) se assemelham ao método de Newton, porém a matriz Jacobiana de F é substituída por uma aproximação B^k . Assim, uma iteração dos métodos quase-Newton é dada por:

$$B(x^k)d^k = -F(x^k) \quad (21)$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k \quad (22)$$

Nos métodos quase-Newton não há a necessidade do cálculo da matriz Jacobiana da função F , o que torna o método “mais barato” do que o método de Newton do ponto de vista computacional. Entretanto, essa redução nos custos envolvidos altera a ordem de convergência, que passa a ser superlinear (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995).

O método quase-Newton mais simples é o chamado *método de Newton estacionário* (KOZAKEVICH, 1995; YPMA, 1995), que se obtém fixando $B^k \equiv J(x^0)$. Há também o *método de Newton estacionário com recomeços* (SHAMANSKI, 1967), que

consiste em fixar m inteiro e tomar $B^k = J(x^k)$ quando k for múltiplo de m ou $B^k = B^{k-1}$ caso contrário.

3 O PROBLEMA DO DESPACHO HIDROTÉRMICO BRASILEIRO

Os modelos de otimização do despacho hidrotérmico, atualmente utilizados pelo Setor Elétrico Brasileiro, têm o objetivo de determinar a operação econômica do Sistema Interligado Nacional (SIN) através da minimização do custo presente da geração. Esta é feita através da minimização dos custos de geração de energia através de usinas termelétricas e dos custos de déficit. Estes modelos foram desenvolvidos pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) que mantém um conjunto de modelos que abrangem toda a cadeia de planejamento, cujo núcleo se encontra nos modelos NEWAVE (médio prazo) e DECOMP (curto prazo). Esses dois modelos foram desenvolvidos com base na tecnologia de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) desenvolvida por Pereira (1989) e Pereira e Pinto (1985). A PDDE se baseia na técnica de decomposição de Benders (BENDERS, 1962) e na hipótese simplificada de reservatórios equivalentes. Esta abordagem caracteriza-se por enfatizar a incerteza das vazões futuras no planejamento da operação do SIN no médio/longo prazo.

Entretanto, deve-se ressaltar que as diretrizes dos modelos NEWAVE e DECOMP foram definidas quando o Setor Elétrico Brasileiro (SEB) era predominantemente estatal e centralizado em sua totalidade, com forte predominância hidrelétrica e com uma folga (slack) na geração que permitia acomodar as imprecisões decorrentes das linearizações realizadas pela PDDE, da qualidade dos registros históricos de vazões e das simplificações decorrentes dos sistemas equivalentes. Ainda há distorções provocadas pelo descolamento entre a parte produtiva e comercial no SEB e as intervenções realizadas fora do modelo para garantir o suprimento. Como exemplo destas intervenções extra modelo, citam-se a adoção das Curvas de Aversão ao Risco (CAR) e o uso de térmicas fora da ordem de mérito econômico. Estas limitações inerentes à

abordagem atual motivam a busca por soluções inovadoras.

3.1 O SISTEMA INTERLIGADO NACIONAL E O PLANEJAMENTO

3.1.1 Breve Histórico

Em meados da década de 1950, o Brasil passava por uma fase de grande crescimento demográfico e consequente desenvolvimento econômico. A produção de energia, porém, não conseguiu acompanhar o ritmo dessas mudanças, fazendo com que medidas drásticas, como períodos de racionamento, fossem tomadas (FRANCO, 1993). Em meio ao claro prejuízo que essas políticas causaram, as empresas envolvidas no planejamento e geração de energia elétrica se viram na obrigação de buscar avanços e novas tecnologias para o sistema elétrico brasileiro. Contudo, por ser um país único em termos de características físicas e socioeconômicas, as soluções existentes em outros sistemas ou países não puderam ser incorporadas à realidade brasileira.

O sistema elétrico brasileiro atual é interligado em sua quase totalidade (apenas alguns poucos pontos na região amazônica ficam isolados). Essa condição de intercâmbio de energia entre os subsistemas exige um equilíbrio entre a geração térmica e hidrelétrica nas diversas usinas, visando a otimização da operação como um todo, reduzindo assim os custos envolvidos. Entretanto, a geração hidrotérmica traz consigo um risco, associado tanto às incertezas na demanda de energia quanto às afluências naturais. Por esse motivo ressalta-se que o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos é um problema essencialmente estocástico (CEPEL, 1999).

3.1.2 Geração Hidrotérmica

A energia hidrelétrica é a obtenção de energia elétrica através do aproveitamento hidráulico de um rio. Para que esse processo seja realizado, é necessária a construção de usinas em rios que possuam elevado volume de água e que apresentem desníveis em seu curso.

A energia potencial obtida do armazenamento de água em reservatórios é transformada em energia cinética quando esta é conduzida sob pressão através do conduto forçado ao conjunto de turbinas. As turbinas absorvem a energia cinética do fluxo de água, transformando-a em energia mecânica. Finalmente, esta energia é transmitida através de um eixo ao gerador que por sua vez a transforma em energia elétrica. A água segue então para o rio pelo canal de fuga. A Figura 1 ilustra o processo descrito.

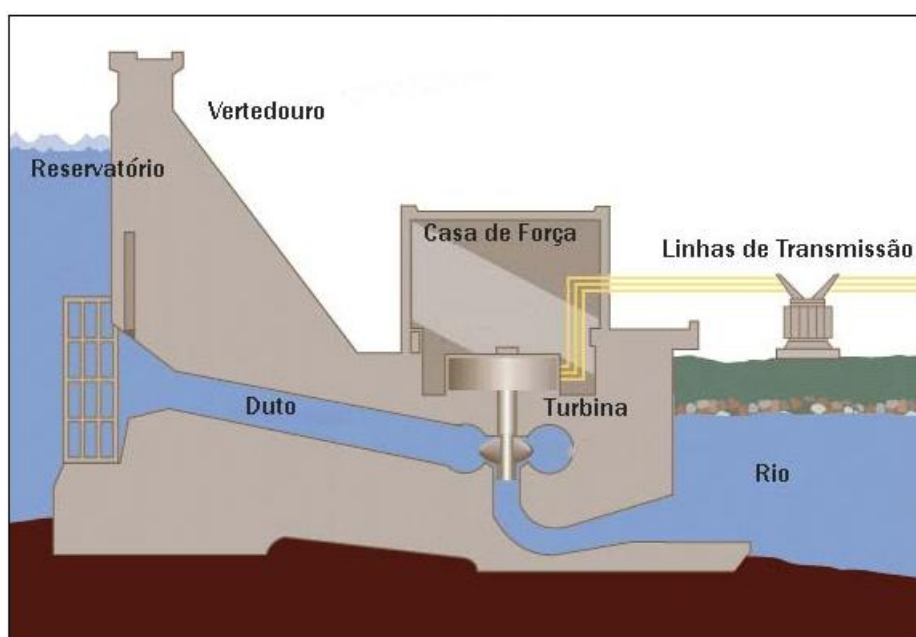


FIGURA 1: O processo de geração energética através de uma usina hidrelétrica

FONTE: Adaptado de TVA (2011)

O funcionamento das centrais termelétricas é semelhante, independentemente do combustível utilizado. O combustível é armazenado em parques ou em depósitos adjacentes, de onde é enviado para a usina, onde será queimado na caldeira, gerando vapor a partir da água que circula por uma extensa rede de tubos que revestem suas paredes. O vapor movimenta as pás de uma turbina, cujo rotor gira juntamente com o eixo de um gerador que produz a energia elétrica. O vapor é resfriado em um condensador e convertido outra vez em água, que volta aos tubos da caldeira, dando início a um novo ciclo. A Figura 2 descreve o processo de geração de energia a vapor numa usina termelétrica. Mais detalhes sobre geração de energia pode ser encontrado

em ANEEL (2008).

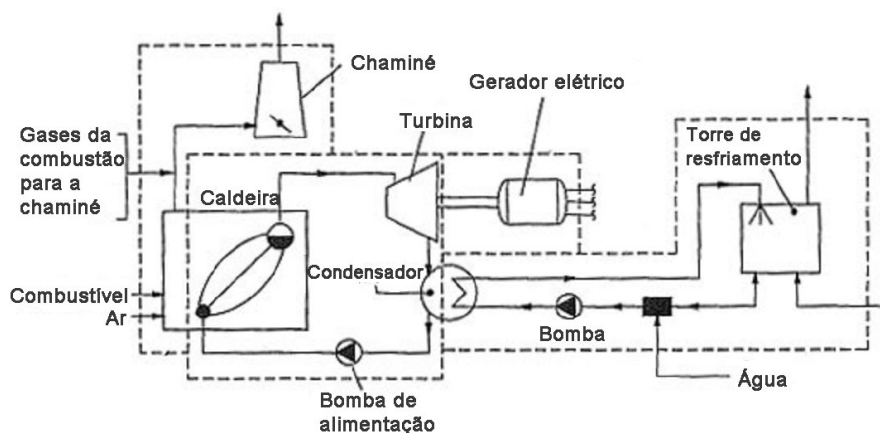


FIGURA 2: Esquema de geração a vapor numa usina termelétrica

FONTE: Lora e Nascimento (2004)

3.1.3 Características do Sistema Atual

O Brasil é um país privilegiado em termos de disponibilidade de recursos hídricos. Este fato permite que grande parte da geração de energia seja feita através de usinas hidrelétricas. Em números (ANEEL, 2008), os sistemas termelétricos correspondem a 1042 empreendimentos, abastecidos por fontes diversas (gás natural, biomassa, óleo diesel e óleo combustível) com capacidade instalada de 25383,92 MW, ou 24,22% da produção nacional. Em contrapartida, os sistemas hidrelétricos correspondem a 706 empreendimentos (incluindo centrais geradoras, pequenas centrais hidrelétricas e usinas geradoras) com capacidade instalada de 77152,27 MW, ou 73,60% da produção. Os demais sistemas geradores estão compreendidos em centrais eólicas, duas usinas nucleares e uma central solar fotovoltaica, totalizando 20 empreendimentos que geram 2279,67 MW, ou 2,18%. Uma simples análise desses números evidencia o domínio dos sistemas termo e hidrelétricos. A Tabela 1 traz um resumo das usinas em operação no país, com classificação segundo a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL, 2008).

TABELA 1: Resumo da geração hidrelétrica no Brasil

Tipo	Critério	Quantidade	Potência (MW)	%
Central Geradora Hidrelétrica	Até 1 MW	227	120,01	0,11
Pequena Central Hidrelétrica	De 1,1 MW a 30 MW	320	2399,63	2,29
Usina Hidrelétrica de Energia	Acima de 30 MW	159	74632,63	71,20
Total	-	706	77152,27	73,60

Fonte: ANEEL (2008)

Além dos empreendimentos citados na Tabela 1, 599 novas usinas estão em construção e/ou outorgadas.

No tocante às usinas hidrelétricas, os reservatórios componentes são projetados e operados de dois modos distintos: regularização, nos quais as vazões afluentes ficam represadas por longos períodos de tempo resultando em grandes volumes e maiores áreas alagadas, e reservatórios a fio d'água, nos quais toda a afluência que chega é utilizada diretamente para a geração, sem armazenamento. Para as usinas a fio d'água os reservatórios têm tamanho reduzido e muitas vezes possuem a função principal de criar alturas de queda para as turbinas e são chamados reservatórios de compensação.

A operação dos diversos reservatórios brasileiros apresenta ainda uma parcela extra de complexidade, pois muitos deles não estão limitados à geração de energia apenas. Existem muitos casos de usinas em cascata, nas quais a descarga de montante é uma porção significativa de sua afluência. Além disso, atividades paralelas como controle de cheias, navegação, irrigação, saneamento e restrições quanto a níveis de jusante e montante figuram como balizadores dos processos decisórios envolvidos nas operações (FORTUNATO *et al.*, 1990).

3.1.4 Despacho Centralizado

Pode-se caracterizar a operação do SIN como centralizada, pois é o Operador Nacional do Sistema (ONS) quem define a operação de todas as usinas de médio e grande porte. Os agentes proprietários das usinas com despacho centralizado devem seguir as instruções do ONS, devendo preocupar-se mais com a manutenção das suas usinas.

A operação centralizada do SIN se justifica pela sua capacidade de regularização das afluições hidrológicas. O despacho centralizado torna possível um melhor aproveitamento dos benefícios da diversidade hidrológica, além de evitar conflitos de interesse entre agentes com usinas em uma mesma cascata.

Uma das desvantagens da operação centralizada de grandes sistemas é que ela aumenta a complexidade do planejamento, o que acarreta a necessidade da adoção de hipóteses simplificadoras na modelagem matemática. De fato, trabalhos internacionais (BAHRAMI; CALDWELL, 1979; MACGILL; KAYE, 1999) argumentam que o despacho centralizado pode ser inadequado para sistemas de grande porte, pois o operador central do sistema pode não possuir todas as informações locais disponíveis aos agentes. O aumento da participação de usinas de despacho descentralizado (cogeração, geração distribuída) é outro fator que contribui para aumentar a complexidade do despacho centralizado.

Apesar destes fatores, a predominância das grandes usinas hidrelétricas no Brasil significa que o planejamento da operação deve continuar centralizado. O desafio passa a ser determinar abordagens à modelagem do sistema que permitam minimizar as desvantagens advindas da operação centralizada.

3.1.5 Planejamento da Operação no Aspecto Energético

Uma das prioridades do planejamento da operação do SIN é garantir que o risco de ocorrência de um déficit de energia seja aceitável. Este aspecto característico

dos sistemas predominantemente hidrelétricos se constitui como uma condição de contorno importante no planejamento da operação.

No caso da otimização do despacho hidrotérmico do SIN, o problema é formulado como a minimização do custo de operação do sistema, sujeito à restrição de segurança de abastecimento e às restrições do sistema (limites de armazenamento, turbinamento, entre outros). Esta etapa é comumente denominada “planejamento da operação”.

A metodologia em vigência define a restrição de segurança de abastecimento como um risco menor ou igual a 5% para o risco de ocorrência de qualquer déficit.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

O problema de programação não-linear descrito a seguir tem por objetivo tomar uma decisão dentre as duas políticas abaixo:

1. Minimizar o consumo de combustíveis em termelétricas com despacho intensivo das usinas hidrelétricas;
2. Minimizar o consumo de água a fim de preservar o nível dos reservatórios hidrelétricos, despachando de forma mais intensiva as termelétricas.

A política 1 implica em um baixo custo de operação no curto prazo devido à economia de combustíveis, mas tende a aumentar o custo de operação futuro, em especial se as aflúências hidrológicas forem baixas. A política 2 ameniza o aumento do custo de operação futuro caso a hidrologia seja desfavorável, mas implica em aumento no custo da operação em curto prazo devido à necessidade de despachar mais intensivamente as termelétricas. Como é muito difícil prever as aflúências futuras em horizontes maiores do que algumas semanas, não é possível definir uma boa política de operação sem levar em consideração a dependência temporal e a natureza estocástica do problema.

A Figura 3 mostra a dificuldade em se tomar a decisão de despachar energia através das hidrelétricas e termelétricas visando a operação econômica, pois as condições climáticas futuras são de suma importância.

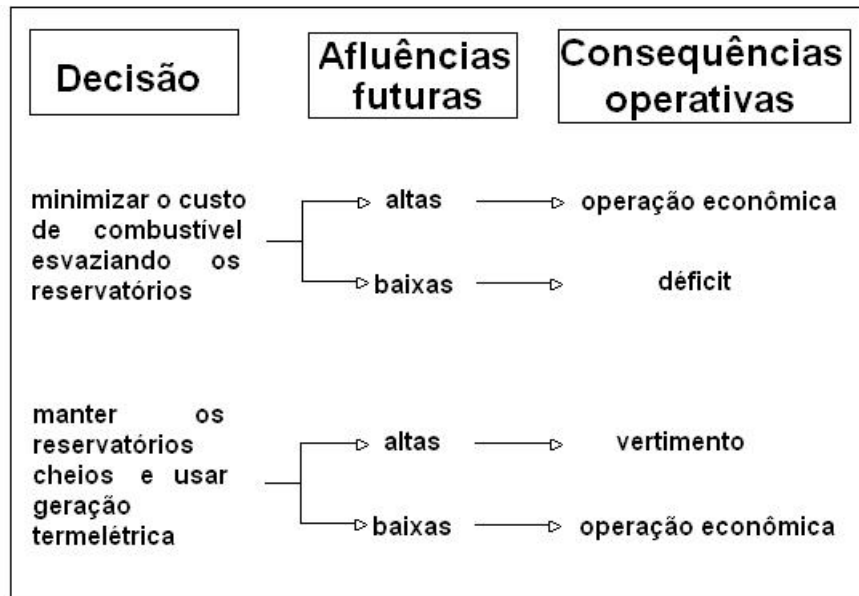


FIGURA 3: O dilema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos

FONTE: CEPEL (1999)

O modelo considerado tem o objetivo de minimizar os custos de geração termelétrica e de déficit energético do sistema, levando em consideração as restrições operativas das usinas, balanço hídrico, atendimento à demanda e defluência mínima total nos reservatórios.

As variáveis envolvidas na descrição do modelo estão relacionadas a seguir:

$GT_{j,t}$: geração da usina térmica j durante o período t [$MWmês$];

$V_{r,t}$: volume armazenado no reservatório r para o período t [hm^3];

$QVT_{r,t}$: vazão vertida do reservatório r durante o período t [m^3/s];

$QC_{r,t}$: vazão turbinada do reservatório r durante o período t [m^3/s];

$INT_{i,t}$: intercâmbio de energia na linha i no período t [$MWmês$];

$DEF_{s,t}$: déficit de energia do subsistema s durante o período t [$MWmês$].

A unidade de energia utilizada nas variáveis $GT_{j,t}$, $INT_{i,t}$ e $DEF_{s,t}$ é o megawatt médio $MWmês$, onde $1 MWmês$ é a energia produzida por um gerador com uma potência efetiva de $1 MW$ trabalhando continuamente durante um intervalo de tempo (neste caso, um mês). Ele pode ser transformado em megawatt-hora multiplicando o seu valor pelo número de horas em um passo de tempo, que durante um mês típico de 30 dias resultaria em $1 MWmês = 720 MWh$.

3.2.1 Função Objetivo

A função objetivo consiste na minimização do valor presente dos custos de geração térmica e de déficit, e pode ser descrita por:

$$\min CUSTO = \min \sum_{t=1}^T \omega_t \left[\sum_{j=1}^J CT_j(GT_{j,t}) + \sum_{s=1}^S CD_s(DEF_{s,t}) \right] \quad (23)$$

onde T é o último período do horizonte de otimização, J é o número de usinas térmicas do sistema, S é o número de subsistemas e ω_t é o coeficiente de atualização do valor presente para o período t :

$$\omega_t = \frac{1}{(1 + \tau)^t} \quad (24)$$

e τ é a taxa de desconto.

A função de custo térmico CT_j é uma função que representa o custo $[R\$]$ da usina térmica j para o período t . Esta função depende do tipo de combustível utilizado na usina e será aproximada por um polinômio de grau 2.

O valor econômico dos déficits de energia é representado pela variável CD_s $[R\$]$, função de custo de déficit do subsistema s , e deve representar o impacto causado pelo não suprimento da demanda de energia nas diferentes atividades econômicas do país. Este custo será representado por um polinômio de 2º grau, obtido por uma aproximação quadrática da função linear por partes definida pelo NEWAVE.

3.2.2 Restrição de Atendimento à Demanda

A restrição de atendimento à demanda de energia tem por objetivo garantir o atendimento de carga do subsistema. A demanda de energia no subsistema s no período t será denotada pela variável $D_{s,t}$ [MWmês] e está representada pela seguinte equação:

$$\sum_{j \in J_s} GT_{j,t} + \sum_{r \in R_s} GH_{r,t} + \sum_{i \in I_s} INT_{i,t} = D_{s,t} - DEF_{s,t} \quad (25)$$

onde I_s representa o conjunto de linhas de conexão do subsistema s ; J_s é o conjunto de usinas térmicas no subsistema s e R_s o conjunto de usinas hidráulicas no subsistema s .

A energia gerada na usina hidrelétrica, $GH_{r,t}$ [MWmês], é obtida a partir da função de produção hidráulica, que tem fortes características de não-linearidade, e pode ser definida como:

$$GH_{r,t} = k_r HLi_{r,t} QC_{r,t} \quad (26)$$

onde $HLi_{r,t}$ é a altura líquida [m] do reservatório r e k_r é uma constante que recebe o nome de produtibilidade específica da usina r , obtida do rendimento médio da usina $\eta_r^{médio}$, da aceleração da gravidade \bar{g} e da massa específica da água ρ_a , pela seguinte equação:

$$k_r = \eta_r^{médio} \bar{g} \rho_a \quad (27)$$

O rendimento médio da usina é obtido a partir do modelo NEWAVE, \bar{g} tem o valor de $9,81 \text{ m/s}^2$ e ρ_a de 1000 kg/m^3 .

O cálculo da cota de montante do reservatório, utilizado para obtenção da altura líquida, é feito utilizando-se a média entre os volumes de início e fim do período, ou seja, o volume médio $V_{med_{r,t}}$ [hm³]:

$$V_{med_{r,t}} = \frac{V_{r,t-1} + V_{r,t}}{2} \quad (28)$$

Assim, a função de produtibilidade de uma usina hidrelétrica pode ser expressa

como:

$$GH_{r,t} = k_r[\phi_r(Vmed_{r,t}) - \theta_r(Q_{r,t}) - pc_{r,t}]QC_{r,t} \quad (29)$$

onde θ_r representa a cota de jusante $[m]$ do canal de fuga da usina r e ϕ_r , a cota de montante $[m]$ do reservatório r .

Para usinas afogadas, o polinômio de cota jusante θ_r é encontrado via interpolação de polinômios de referência, calculados previamente por modelos hidráulicos.

A partir da cota de montante do reservatório e da cota do canal de fuga, definem-se os valores de altura de queda bruta, $HBruta_{r,t} [m]$:

$$HBruta_{r,t} = \phi_{r,t} - \theta_{r,t} \quad (30)$$

e a altura de queda líquida, $HLiq_{i,t} [m]$:

$$HLiq_{r,t} = \phi_{r,t} - \theta_{r,t} - pc_{r,t} \quad (31)$$

onde $pc_{r,t}$ são as perdas de carga hidráulica $[m]$ na usina r no período t . Estas perdas são decorrentes principalmente devido ao atrito entre a água e as canalizações do tubo de adução e podem ser representadas de três formas:

$$pc_{r,t} = \begin{cases} c_r HBruta_{r,t} \\ c_r \\ c_r QC_{r,t}^2 \end{cases} \quad (32)$$

onde c_r é uma constante chamada de coeficiente de perdas hidráulicas da usina r . A primeira representação indica uma porcentagem da altura bruta da usina, a segunda um valor constante em metros e a terceira é função da turbinagem da usina. A segunda representação será utilizada neste trabalho, ou seja, as perdas de cargas hidráulicas serão consideradas constantes.

3.2.3 Restrição de Balanço Hídrico

A restrição de balanço hídrico relaciona o volume de um reservatório com o volume do período anterior, as afluições do reservatório e as perdas. Para que seja possível realizar essa operação é necessária uma mudança de unidades, transformando o volume de hm^3 para m^3/s . Dessa maneira, na restrição de balanço hídrico, o volume deve ser multiplicado por $10^6/S_{mês}$, onde $S_{mês}$ corresponde à quantidade de segundos no mês:

$$V_{r,t} \left(\frac{10^6}{S_{mês}} \right) = V_{r,t-1} \left(\frac{10^6}{S_{mês}} \right) + \sum_{l \in M_r} (QC_{l,t} + QVT_{l,t}) - QC_{r,t} - QVT_{r,t} + Y_{r,t} - \sum_{l \in M_r} Y_{l,t} \quad (33)$$

onde $Y_{r,t}$ representa a afluição natural $[m^3/s]$ ao reservatório r durante o período t e M_r representa o conjunto de reservatórios imediatamente a montante do reservatório r .

A afluição natural é obtida com a retirada do efeito da operação de aproveitamentos a montante e as incorporações das vazões relativas à evaporação de aproveitamentos a montante e à evaporação líquida dos reservatórios e ao uso consecutivo da água em toda bacia, através de processos de reconstituição das vazões naturais (CONTIJO; ROCHA, 2009).

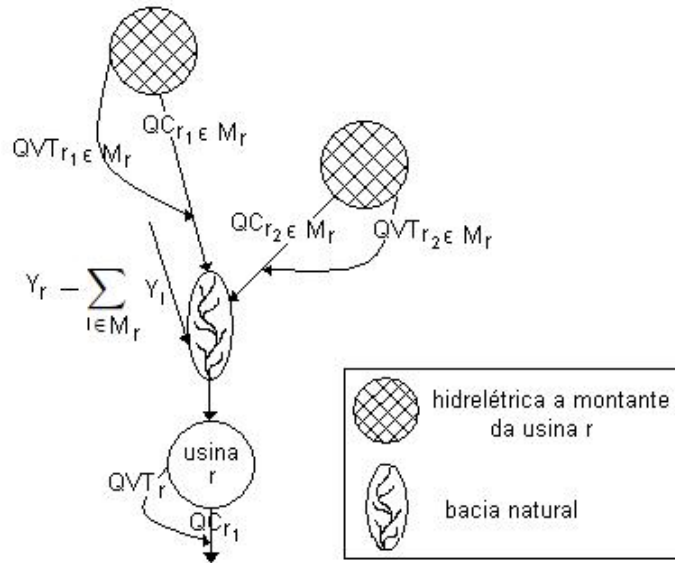


FIGURA 4: Balanço hídrico

FONTE: O autor (2011)

Na Figura 4 tem-se uma representação do balanço hídrico para uma usina r com duas usinas a montante, e a equação para este caso é:

$$V_{r,t} = V_{r,t-1} + (QC_{l_1,t} + QVT_{l_1,t} + QC_{l_2,t} + QVT_{l_2,t}) - QC_{r,t} - QVT_{r,t} + Y_{r,t} - (Y_{l_1,t} + Y_{l_2,t})$$

onde a variável volume deve ser multiplicada por $\left(\frac{10^6}{S_{\text{mês}}}\right)$.

3.2.4 Restrição de Defluência Mínima

A restrição de defluência mínima total para o reservatório garante a utilização dos recursos hídricos para outras atividades além da geração de eletricidade, como controle de cheias, navegabilidade de rios, irrigação etc. Considerando que a defluência total $Q_{r,t}$ do reservatório r é a soma da vazão vertida $QVT_{r,t}$ com a turbinada $QC_{r,t}$, tem-se:

$$Q_{r,t} = QVT_{r,t} + QC_{r,t} \quad (34)$$

Assim a restrição pode ser escrita como:

$$QVT_{r,t} + QC_{r,t} \geq Qmin_{r,t} \quad (35)$$

onde $Qmin_{r,t}$ representa a vazão total mínima [m^3/s] de defluência do reservatório r no período t . Vale notar que estes limites são dependentes do tempo considerado, pois são resultados de políticas de operação.

3.2.5 Restrição de Limite das Variáveis

Além da geração da usina, as hidrelétricas apresentam uma série de restrições operativas que devem ser consideradas no problema de otimização. Os limites na capacidade de armazenamento do reservatório podem ser descritos pela expressão:

$$Vmin_{r,t} \leq V_{r,t} \leq Vmax_{r,t} \quad (36)$$

onde $Vmin_{r,t}$ e $Vmax_{r,t}$ representam, respectivamente, os níveis mínimo e máximo [hm^3/s] do reservatório r no período t . Esses valores são dependentes do tempo devido ao atendimento das restrições de uso múltiplo da água, como por exemplo, uso do reservatório para fins recreativos e de turismo, controle e segurança de cheias.

Limitações quanto à capacidade de vazão turbinada do reservatório r :

$$QCmin_r \leq QC_{r,t} \leq QCmax_r \quad (37)$$

onde $QCmin_r$ e $QCmax_r$ representam, respectivamente, as vazões mínima e máxima [m^3/s] de turbinagem do reservatório r , e dependem da capacidade de engolimento das turbinas da usina.

Limitação para vazão vertida do reservatório r :

$$0 \leq QVT_{r,t} \leq QVTmax_r \quad (38)$$

onde $QVTmax_r$ representa a vazão máxima [m^3/s] de vertimento do reservatório r . Em alguns reservatórios, a vazão do vertedouro é controlada através de comportas, em

outros há vertimento sempre que o nível d'água ficar acima da crista do vertedouro.

Por sua vez, as usinas termelétricas também estão sujeitas a limites mínimo e máximo de geração em cada período t , representados pelas variáveis $GTmin_{j,t}$ e $GTmax_{j,t}$ [$MWmês$]:

$$GTmin_{j,t} \leq GT_{j,t} \leq GTmax_{j,t} \quad (39)$$

onde j representa o índice que denota a usina térmica, $j = 1, \dots, J$.

O sistema elétrico brasileiro é usualmente representado por quatro subsistemas, interligados por um sistema de transmissão que possui restrições de intercâmbios. Este intercâmbio entre subsistemas, representado pela variável $INT_{i,t}$ indica o intercâmbio de energia [$MWmês$] em cada uma das linhas de transmissão entre os subsistemas no período t . O intercâmbio está sujeito a limites energéticos, que advêm dos limites das linhas de transmissão entre os subsistemas:

$$INTmin_{i,t} \leq INT_{i,t} \leq INTmax_{i,t} \quad (40)$$

Foi adotada nessa modelagem a premissa que o limite inferior de uma linha de transmissão, $INTmin_{i,t}$, é igual a $-INTmax_{i,t}$ que representa o intercâmbio máximo de energia [$MWmês$] entre dois subsistemas no período t . O índice i denota as linhas de intercâmbio, $i = 1, \dots, I$ sendo I o conjunto de linhas de intercâmbio.

i	De → Para
1	sub. 1 → sub. 2
2	sub. 1 → sub. 3
3	sub. 1 → sub. 4
4	sub. 3 → sub. 4
5	sub. 5 → sub. 1
6	sub. 5 → sub. 2

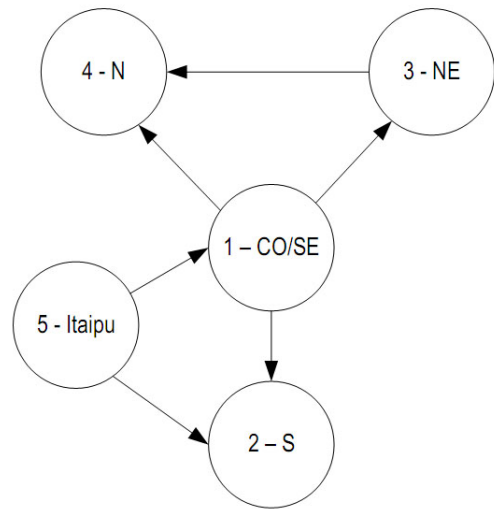


FIGURA 5: Linhas de intercâmbio entre os subsistemas

FONTE: Adaptado da ANEEL (2008)

As convenções adotadas para as linhas de intercâmbio estão esquematizadas na Figura 5. Neste trabalho, o subsistema 5 representa a usina de Itaipu, tratada como um subsistema isolado onde não existe demanda, somente geração de energia.

Quando a variável $INT_{i,t}$ assume valores negativos significa que o sentido do fluxo de energia é o oposto ao definido, com exceção das linhas 5 e 6 que não possuem fluxo inverso, tendo como limite inferior o valor zero.

A variável $DEF_{s,t}$ que representa o déficit de energia de cada subsistema s no período t , possui somente limite inferior:

$$0 \leq DEF_{s,t} \quad (41)$$

3.2.6 Modelo Matemático

Reescrevendo todos os conceitos abordados, tem-se o modelo de programação não-linear para o problema de otimização energética:

$$\min \sum_{t=1}^T \omega_t \left[\sum_{j=1}^J CT_j(GT_{j,t}) + \sum_{s=1}^S CD_s(DEF_{s,t}) \right]$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_s} GT_{j,t} + \sum_{r \in R_s} GH_{r,t} + \sum_{i \in I_s} INT_{i,t} &= D_{s,t} - DEF_{s,t} \\ V_{r,t} \left(\frac{10^6}{S_{m\hat{e}s}} \right) &= V_{r,t-1} \left(\frac{10^6}{S_{m\hat{e}s}} \right) + \sum_{l \in M_r} (QC_{l,t} + QVT_{l,t}) - QC_{r,t} - QVT_{r,t} + Y_{r,t} - \sum_{l \in M_r} Y_{l,t} \\ QVT_{r,t} + QC_{r,t} &\geq Qmin_{r,t} \\ GTmin_{j,t} &\leq GT_{j,t} \leq GTmax_{j,t} \\ Vmin_{r,t} &\leq V_{r,t} \leq Vmax_{r,t} \\ 0 &\leq QVT_{r,t} \leq QVTmax_r \\ QCmin_r &\leq QC_{r,t} \leq QCmax_r \\ INTmin_{i,t} &\leq INT_{i,t} \leq INTmax_{i,t} \\ 0 &\leq DEF_{s,t} \end{aligned} \tag{42}$$

4 O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES

Neste capítulo é feita uma breve descrição de trabalhos que utilizam a metodologia de Pontos Interiores em problemas teóricos e práticos. O método de Pontos Interiores primal-dual com barreira logarítmica é desenvolvido com base na modelagem apresentada no Capítulo 3.

4.1 ESTADO DA ARTE

O Método de Pontos Interiores é muito utilizado para se resolver problemas de grande porte devido a sua eficiência observada em testes reais. Gondzio e Grothey (2004) resolvem problemas não-lineares com milhares de variáveis usando método de Pontos Interiores e computação paralela, demonstrando o seu potencial.

El-Bakry *et al.* (1996) discutem minuciosamente a diferença entre o método de Pontos Interiores do tipo primal-dual e o método de Newton amortecido aplicado às condições de KKT para o problema da função barreira logarítmica em programação linear. Ainda neste trabalho, a teoria é estendida para programação não-linear e, sob hipóteses padrões do método de Newton, um algoritmo localmente convergente é apresentado. O algoritmo é aplicado a um subconjunto de problemas-testes da coleção Hock-Schittkowski e os resultados numéricos comprovam o bom desempenho da teoria utilizada.

Vanderbei e Shanno (1999) descrevem um algoritmo (conhecido como LOQO) de Pontos Interiores para programação não-convexa e não-linear, o qual é uma extensão direta dos casos linear e quadrático. São usadas uma função de mérito e uma direção de busca alterada que garante que a direção é de descida para a função de mérito. Alguns problemas da coleção Hock-Schittkowski são usados como testes e o

desempenho do LOQO é comparado com LANCELOT e MINOS.

No trabalho de Quintana e Torres (1998), os métodos primal-dual e preditor-corretor de Pontos Interiores são descritos em detalhes para programação não-linear. Um exemplo numérico no plano é resolvido passo a passo e interpretado geometricamente. Também são apresentadas as ideias de programação linear sequencial e programação quadrática sequencial, que consistem em fazer aproximações lineares e quadráticas do problema não-linear em cada iteração, respectivamente.

No setor energético, o método de Pontos Interiores é bastante aplicado devido ao grande dimensionamento que os problemas adquirem. No trabalho de Azevedo (2006), é desenvolvido um modelo de otimização para usinas individualizadas e de um modelo de fluxo de potência ótimo corrente contínua, onde o método de Pontos Interiores é aplicado a fim de resolver o problema e contribuir para o planejamento e a programação da operação de sistemas hidrotérmicos. Azevedo baseia-se em três premissas que diferenciam seu trabalho com a metodologia que está em vigor no setor elétrico brasileiro: a operação individualizada das usinas hidrelétricas e termelétricas, a representação detalhada das características de operação dessas usinas e a representação indireta da estocasticidade das vazões através de modelo de previsão. Duas abordagens são seguidas no trabalho de Azevedo. A primeira considera como variáveis de decisão o volume e a defluência, o que acarretou em pontos de não-diferenciabilidade na função objetivo e consequentemente gerando problemas na convergência, e a segunda considera que a defluência é a soma da turbinagem e do vertimento, tal abordagem com maior sucesso em problemas de grande porte. Duas variantes do método de Pontos Interiores foram implementados no trabalho de Azevedo (2006): primal-dual e preditor-corretor. O preditor-corretor apresentou maior eficiência para problemas menores, entretanto o primal-dual obteve bons resultados tanto para problemas pequenos quanto para problemas grandes.

Probst (2006) aplica o método de Pontos Interiores primal-dual de trajetória central e preditor-corretor a um problema de minimização das perdas na geração e transmis-

são do pré-despacho do fluxo de potência linearizado de um sistema de potência hidrotérmico. O método preditor-corretor obteve desempenho superior nos testes realizados (sistemas IEEE30 com 6216 variáveis e IEEE118 com 32740 variáveis) em comparação com o primal-dual de trajetória central, mesmo requerindo maior esforço computacional por iteração.

Souza, Balbo e Baptista (2008) fazem uma aplicação do método de Pontos Interiores do tipo preditor-corretor com procedimento de busca unidimensional em um problema de Despacho Econômico, que consiste na minimização de funcionais quadráticos, com restrições lineares. O método é aplicado em problemas-testes presentes na literatura e os resultados são comparados com os de outros métodos de otimização. O método proposto mostrou-se bastante satisfatório para essa classe de problemas.

O método de Pontos Interiores versão preditor-corretor é empregado no trabalho de Barboza (2006) a fim de resolver o problema de minimização de perda de potência ativa em linhas de transmissão de um sistema de energia elétrica. O método é aplicado em sistemas reais equivalentes da região Sul-Sudeste do Brasil. O desempenho da metodologia é comparado com as soluções determinadas através das técnicas convencionais de fluxo de carga. Os resultados mostram que a metodologia oferece, do ponto de vista econômico de operação do sistema de energia elétrica, uma solução de melhor qualidade, reduzindo em média 20% da perda de potência ativa total em comparação com as técnicas convencionais.

No trabalho de Medina, Quintana e Conejo (1999), seis códigos comerciais e de pesquisa de Pontos Interiores foram comparados quando aplicados para um sistema de potências da Espanha. São eles: PCx, HOPDM, LIPSOL, IPA1, CPLEX-Logbarrier (todos estes baseados no algoritmo de Mehrotra (MEHROTRA, 1992)) e LOQO (método primal-dual). Duas classes de problemas foram testadas, uma de pequeno-médio porte para otimizar a operação de um sistema com 3 usinas termelétricas e 3 usinas hidrelétricas acopladas com 48 períodos de tempo, resultando em um problema com 819 restrições e 1296 variáveis. A segunda, um sistema da Espanha

com 30 termelétricas e 29 hidrelétricas acopladas, resultando em um problema com 7830 restrições e 13500 variáveis. Em ambos os casos, a formulação recaiu em um problema linear e o desempenho foi comparado com o do método simplex, onde se confirmou a maior eficiência dos métodos de Pontos Interiores.

4.2 O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES PRIMAL-DUAL COM BARREIRA LOGARÍTMICA

A seguir, será descrito o método de Pontos Interiores primal-dual com barreira logarítmica, que consiste em trabalhar com um problema composto somente por restrições de igualdade. Para isto, considera-se um problema de otimização da forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(x) \\
 &\text{sujeito a :} && g(x) = 0 \\
 &&& Ax = b \\
 &&& Cx \leq c \\
 &&& l \leq x \leq u
 \end{aligned} \tag{43}$$

onde x é a variável de decisão, f é a função objetivo não-linear, g representa as restrições não-lineares de igualdade, $Ax = b$ e $Cx \leq c$ são restrições lineares de igualdade e desigualdade, respectivamente, e $l \leq x \leq u$ são os limites para as variáveis, também conhecidos como restrições de caixa. As funções f e g devem ser contínuas com derivadas contínuas, $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b, c \in \mathbb{R}^p$ e $l, u \in \mathbb{R}^n$.

Variáveis de folga (w , y e z) são acrescentadas às restrições de desigualdade a fim de transformá-las em igualdades (QUINTANA; TORRES, 1998; VANDERBEI; SHANNO, 1999). Esta metodologia modifica a dimensão do problema incrementando o número de variáveis. Entretanto o problema original é transformado em um problema de otimização somente com restrições de igualdade, deixando de ser necessária a determinação do conjunto de restrições de desigualdade ativas na solução.

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && f(x) \\
& \text{sujeito a :} && g(x) = 0 \\
& && Ax - b = 0 \\
& && Cx - c + w = 0 \\
& && -x + l + y = 0 \\
& && x - u + z = 0 \\
& && w \geq 0, y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned} \tag{44}$$

Penalizam-se as variáveis que devem ser não-negativas através da função barreira logarítmica (FRIEDLANDER, 1994):

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && f(x) - \rho \left\{ \sum_{i=1}^p \ln(w_i) + \sum_{i=1}^n [\ln(y_i) + \ln(z_i)] \right\} \\
& \text{sujeito a :} && g(x) = 0 \\
& && Ax - b = 0 \\
& && Cx - c + w = 0 \\
& && -x + l + y = 0 \\
& && x - u + z = 0 \\
& && w > 0, y > 0, z > 0
\end{aligned} \tag{45}$$

onde $\rho > 0$ é o parâmetro barreira que é monotonicamente decrescente à zero (CARVALHO, 2005).

4.2.1 Função Lagrangeana

A função Lagrangeana associada ao problema penalizado (45) é:

$$\begin{aligned}
L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, w, y, z) = & f(x) + \lambda_1^T g(x) + \lambda_2^T (Ax - b) + \\
& \lambda_3^T (Cx - c + w) + \lambda_4^T (-x + l + y) + \\
& \lambda_5^T (x - u + z) - \\
& \rho \left\{ \sum_{i=1}^p \ln(w_i) + \sum_{i=1}^n [\ln(y_i) + \ln(z_i)] \right\}
\end{aligned} \tag{46}$$

onde $\lambda_1 \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^p$ e $\lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}^n$ são vetores dos multiplicadores de Lagrange,

chamados variáveis duais.

4.2.2 Condições de KKT

Um minimizador local do problema (45) é expresso em termos de um ponto estacionário da função Lagrangeana (46), o qual deve satisfazer as condições necessárias de primeira ordem, conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker, ou simplesmente condições de KKT (FRIEDLANDER, 1994; LUENBERGER, 2005; NOCEDAL; WRIGHT, 2006):

$$\begin{aligned}
 \nabla_x L &= \nabla f(x) + J_g(x)^T \lambda_1 + A^T \lambda_2 + C^T \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\
 \nabla_{\lambda_1} L &= g(x) = 0 \\
 \nabla_{\lambda_2} L &= Ax - b = 0 \\
 \nabla_{\lambda_3} L &= Cx - c + w = 0 \\
 \nabla_{\lambda_4} L &= -x + l + y = 0 \\
 \nabla_{\lambda_5} L &= x - u + z = 0 \\
 \nabla_w L &= \lambda_3 - \rho W^{-1} e_1 = 0 \\
 \nabla_y L &= \lambda_4 - \rho Y^{-1} e_2 = 0 \\
 \nabla_z L &= \lambda_5 - \rho Z^{-1} e_2 = 0
 \end{aligned} \tag{47}$$

onde $\nabla f(x)$ representa o gradiente da função objetivo; $J_g(x)$ é a matriz Jacobiana das restrições não-lineares; e_1 e e_2 são vetores de tamanhos p e n respectivamente, formados por elementos iguais a 1; W , W^{-1} , Y , Y^{-1} , Z e Z^{-1} são matrizes diagonais definidas pelas componentes de w , w^{-1} , y , y^{-1} , z e z^{-1} , respectivamente.

Em geral, da segunda à sexta equação do sistema (47), com $(w, y, z) \geq 0$ são conhecidas na literatura como viabilidade primal, a primeira equação juntamente com $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \geq 0$ são conhecidas como viabilidade dual, enquanto que as três últimas equações são perturbações ($\rho \neq 0$) das condições de complementaridade ($\rho = 0$).

As três últimas equações do sistema (47) podem ser parametrizadas (QUINTANA; TORRES, 1998; VANDERBEI; SHANNO, 1999), multiplicando-as respectivamente por

W , Y e Z , obtendo-se:

$$W\lambda_3 - \rho e_1 = 0 \quad (48)$$

$$Y\lambda_4 - \rho e_2 = 0 \quad (49)$$

$$Z\lambda_5 - \rho e_2 = 0 \quad (50)$$

O objetivo é resolver o seguinte sistema KKT:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + J_g(x)^T \lambda_1 + A^T \lambda_2 + C^T \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 &= 0 \\ g(x) &= 0 \\ Ax - b &= 0 \\ Cx - c + w &= 0 \\ -x + l + y &= 0 \\ x - u + z &= 0 \\ W\lambda_3 - \rho e_1 &= 0 \\ Y\lambda_4 - \rho e_2 &= 0 \\ Z\lambda_5 - \rho e_2 &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

4.2.3 Método de Newton

O sistema (51) é não-linear e será resolvido pelo método de Newton. Uma iteração do método de Newton consiste em determinar x^{k+1} partindo de um ponto x^k fixado, conforme visto na Seção 2.3. Aplicando o método de Newton para resolver (51), obtem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix}
H^k & (J_g^k)^T & A^T & C^T & -I_d & I_d & 0 & 0 & 0 \\
J_g^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 \\
-I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\
I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \\
0 & 0 & 0 & W^k & 0 & 0 & \Lambda_3^k & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & Y^k & 0 & 0 & \Lambda_4^k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z^k & 0 & 0 & \Lambda_5^k
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
dx \\
d\lambda_1 \\
d\lambda_2 \\
d\lambda_3 \\
d\lambda_4 \\
d\lambda_5 \\
dw \\
dy \\
dz
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F1^k \\
F2^k \\
F3^k \\
F4^k \\
F5^k \\
F6^k \\
F7^k \\
F8^k \\
F9^k
\end{bmatrix} \quad (52)$$

onde Λ_i^k são matrizes diagonais formadas pelos elementos de λ_i^k , $i = 1, 2, 3$, I_d são matrizes diagonais de tamanhos apropriados, J_g^k é a matriz Jacobiana de g calculada em x^k , $H^k = \nabla^2 f^k + \sum_{i=1}^p \lambda_{1i}^k \nabla^2 g_i^k$ em que $\nabla^2 f^k$ e $\nabla^2 g^k$ são as matrizes Hessianas de f e g calculadas em x^k , respectivamente,

$$F1^k = \nabla f^k + (J_g^k)^T \lambda_1^k + A^T \lambda_2^k + C^T \lambda_3^k - \lambda_4^k + \lambda_5^k \quad (53)$$

$$F2^k = g(x^k) \quad (54)$$

$$F3^k = Ax^k - b \quad (55)$$

$$F4^k = Cx^k - c + w^k \quad (56)$$

$$F5^k = -x^k + l + y^k \quad (57)$$

$$F6^k = x^k - u + z^k \quad (58)$$

$$F7^k = W^k \lambda_3^k - \rho^k e_1 \quad (59)$$

$$F8^k = Y^k \lambda_4^k - \rho^k e_2 \quad (60)$$

$$F9^k = Z^k \lambda_5^k - \rho^k e_2 \quad (61)$$

As direções dw , dy e dz são isoladas no sistema (52):

$$dw = -(F4^k + Cdx) \quad (62)$$

$$dy = -(F5^k - dx) \quad (63)$$

$$dz = -(F6^k + dx) \quad (64)$$

As direções $d\lambda_3$, $d\lambda_4$ e $d\lambda_5$ também são isoladas no sistema (52):

$$d\lambda_3 = (W^k)^{-1}(-F7^k - \Lambda_3^k dw) \quad (65)$$

$$d\lambda_4 = (Y^k)^{-1}(-F8^k - \Lambda_4^k dy) \quad (66)$$

$$d\lambda_5 = (Z^k)^{-1}(-F9^k - \Lambda_5^k dz) \quad (67)$$

Substituindo (62), (63) e (64) em (65), (66) e (67), respectivamente, obtem-se:

$$d\lambda_3 = (W^k)^{-1}(-F7^k + \Lambda_3^k F4^k + \Lambda_3^k Cdx) \quad (68)$$

$$d\lambda_4 = (Y^k)^{-1}(-F8^k + \Lambda_4^k F5^k - \Lambda_4^k dx) \quad (69)$$

$$d\lambda_5 = (Z^k)^{-1}(-F9^k + \Lambda_5^k F6^k + \Lambda_5^k dx) \quad (70)$$

Agora, substituindo (68), (69) e (70) na primeira equação do sistema (52), tem-se:

$$\begin{aligned} H^k dx + J_g(x^k)^T d\lambda_1 + A^T d\lambda_2 + C^T (W^k)^{-1}(-F7^k + \Lambda_3^k F4^k + \Lambda_3^k Cdx) - \\ (Y^k)^{-1}(-F8^k + \Lambda_4^k F5^k - \Lambda_4^k dx) + (Z^k)^{-1}(-F9^k + \Lambda_5^k F6^k + \Lambda_5^k dx) = -F1^k \end{aligned} \quad (71)$$

Agrupando os termos em dx , obtem-se:

$$\underbrace{[H^k + C^T (W^k)^{-1} \Lambda_3^k C + (Y^k)^{-1} \Lambda_4^k + (Z^k)^{-1} \Lambda_5^k]}_{\hat{H}^k} dx + J_g(x^k)^T d\lambda_1 + A^T d\lambda_2 = \bar{F}^k \quad (72)$$

onde

$$\bar{F}^k = -F1^k - C^T (W^k)^{-1}(-F7^k + \Lambda_3^k F4^k) + (Y^k)^{-1}(-F8^k + \Lambda_4^k F5^k) - (Z^k)^{-1}(-F9^k + \Lambda_5^k F6^k) \quad (73)$$

Tem-se então um sistema linear reduzido a resolver:

$$\begin{bmatrix} \hat{H}^k & (J_g^k)^T & A^T \\ J_g^k & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}^k \\ -F2^k \\ -F3^k \end{bmatrix} \quad (74)$$

Encontrando-se dx , $d\lambda_1$ e $d\lambda_2$ através do sistema (74), as demais direções de Newton são encontradas através das equações (62), (63), (64), (68), (69) e (70).

4.2.4 Atualização das Variáveis

Uma vez que a direção de busca é obtida, em cada iteração k atualizam-se as variáveis (QUINTANA; TORRES, 1998; VANDERBEI; SHANNO, 1999)

Primais:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k dx^k \quad (75)$$

$$w^{k+1} = w^k + \alpha_p^k dw^k \quad (76)$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_p^k dy^k \quad (77)$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_p^k dz^k \quad (78)$$

Duais:

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + \alpha_d^k d\lambda_1^k \quad (79)$$

$$\lambda_2^{k+1} = \lambda_2^k + \alpha_d^k d\lambda_2^k \quad (80)$$

$$\lambda_3^{k+1} = \lambda_3^k + \alpha_d^k d\lambda_3^k \quad (81)$$

$$\lambda_4^{k+1} = \lambda_4^k + \alpha_d^k d\lambda_4^k \quad (82)$$

$$\lambda_5^{k+1} = \lambda_5^k + \alpha_d^k d\lambda_5^k \quad (83)$$

onde $\alpha_p^k \in (0, 1]$ e $\alpha_d^k \in (0, 1]$ são os comprimentos dos passos primal e dual, respectivamente, dados na iteração k .

4.2.5 Tamanho do Passo

Assumindo que na primeira iteração o critério de não-negatividade das variáveis de folga é satisfeito, isto é, $w^0 > 0$, $y^0 > 0$ e $z^0 > 0$, o tamanho do passo primal é calculado a fim de não violar esta condição nas demais iterações (DUTRA, 2004). Por exemplo,

para que a variável w permaneça não-negativa na iteração k , toma-se a equação (76) e exige-se que ela seja não-negativa, ou seja, $\forall i = 1, \dots, p$, tem-se que:

$$w_i^k + \alpha^k dw_i^k \geq 0 \Rightarrow \alpha^k \geq -\frac{w_i^k}{dw_i^k}$$

Como $w_i^k \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, p$ e $\alpha^k \in (0, 1]$, apenas as direções dw_i^k , tais que $dw_i^k < 0$, são consideradas no cálculo.

Faz-se isso para as variáveis y^k e z^k , obtendo-se três α^k . No final, escolhe-se o menor α^k dentre os três, pois assim será assegurado que na próxima iteração as variáveis w^{k+1} , y^{k+1} e z^{k+1} permanecerão não-negativas.

Logo, α_p^k é escolhido da forma (QUINTANA; TORRES, 1998; VANDERBEI; SHANNO, 1999):

$$\alpha_p^k = \delta \min \left\{ \min_{dw_i^k < 0} \left(-\frac{w_i^k}{dw_i^k} \right), \min_{dy_i^k < 0} \left(-\frac{y_i^k}{dy_i^k} \right), \min_{dz_i^k < 0} \left(-\frac{z_i^k}{dz_i^k} \right), 1 \right\} \quad (84)$$

O escalar $\delta \in (0, 1)$ chamado *fator de segurança* é utilizado não somente para melhorar a convergência do problema, mas também assegurar que as variáveis do problema permaneçam estritamente positivas, e não somente não-negativas (FIACCO; MCCORMICK, 1968; WU; DERBS; MARSTEN, 1994). Sendo assim, garante-se que a solução não estará na fronteira da região viável, mas sim dentro dela. Um valor típico para δ é 0.99995 (QUINTANA; TORRES, 1998; GRANVILLE, 1994).

De forma análoga, o comprimento do passo dual é escolhido a fim de manter não-negativos os multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de desigualdade do problema original, isto é, as variáveis λ_3 , λ_4 e λ_5 :

$$\alpha_d^k = \delta \min \left\{ \min_{d\lambda_{3i}^k < 0} \left(-\frac{\lambda_{3i}^k}{d\lambda_{3i}^k} \right), \min_{d\lambda_{4i}^k < 0} \left(-\frac{\lambda_{4i}^k}{d\lambda_{4i}^k} \right), \min_{d\lambda_{5i}^k < 0} \left(-\frac{\lambda_{5i}^k}{d\lambda_{5i}^k} \right), 1 \right\} \quad (85)$$

4.2.6 Atualização do Parâmetro Barreira

O valor residual das condições de complementaridade é chamado *gap de complementaridade* (BARBOZA, 2006; MARIANO, 2006; BOCANEGRA, 2005) e é calculado

na iteração k por :

$$\gamma^k = (w^k)^T \lambda_3^k + (y^k)^T \lambda_4^k + (z^k)^T \lambda_5^k \quad (86)$$

O gap de complementaridade estima a distância entre os problemas primal e dual em cada iteração. A sequência $\{\gamma^k\}_{k=0}^{\infty}$ deve convergir para zero e a relação entre γ^k e ρ^k , implícita nas condições (48) - (50), sugere que ρ^k poderia ser reduzido em cada iteração k em função da diminuição do gap de complementaridade, dado por:

$$\rho^{k+1} = \beta^k \frac{\gamma^k}{q} \quad (87)$$

onde $q = p + 2n$ representa o número total de restrições de desigualdade do problema original (43) e $\beta^k \in (0,1)$, chamado de *parâmetro de centralização*, é o decréscimo esperado de γ^k , mas não necessariamente realizado (OLIVEIRA, 2008). Sua interpretação é: se $\beta^k = 1$, o sistema KKT (51) define uma direção central, um passo de Newton para um ponto no trajeto da barreira. Se $\beta^k = 0$, um passo de Newton puro é dado, também conhecido como direção afim escala (MARSTEN; SALTZMAN, 1989). Para compensar os objetivos de melhorar a direção central e reduzir o parâmetro barreira, β^k é escolhido dinamicamente por $\beta^{k+1} = \max\{0.95\beta^k, 0.1\}$ com $\beta^0 = 0.2$ (QUINTANA; TORRES, 1998).

4.3 METODOLOGIA PROPOSTA

A metodologia apresentada na Seção 4.2 é a metodologia padrão do método primal-dual de Pontos Interiores existente na literatura e que é bastante empregada em problemas teóricos (EL-BAKRY *et al.*, 1996; QUINTANA; TORRES, 1998; VANDERBEI; SHANNO, 1999) e práticos (AZEVEDO, 2006; BARBOZA, 2006; PROBST, 2006). Contudo, para aplicar o método de Pontos Interiores ao problema do despacho hidrotérmico, foi preciso fazer algumas modificações no método.

Conforme visto no Capítulo 3, o problema do despacho hidrotérmico (42) é um problema bastante complexo de se resolver, pois é não-linear, não-convexo e de grande

porte. A restrição de atendimento à demanda (25) é sem dúvida a restrição mais complicada de ser tratada, devido a sua forte não-linearidade. Em resumo, esta restrição envolve um termo composto pela soma de dois polinômios de quarta ordem, calculados nas variáveis V_{med} e Q , e esta soma multiplicada pela variável QC .

No método de Pontos Interiores padrão, as derivadas de primeira e segunda ordem do problema são requeridas. Para as funções lineares, estas derivadas são diretas, mas para as funções não-lineares (função objetivo e restrição de atendimento à demanda), um maior esforço algébrico (derivadas analíticas) ou computacional (derivadas aproximadas) é exigido. As derivadas da função objetivo foram calculadas analiticamente, pois a função não é muito complicada. Conseguiu-se também calcular analiticamente a primeira derivada da restrição de atendimento à demanda, isto é, a matriz Jacobiana da função $g(x)$. Estas derivadas analíticas são apresentadas no Apêndice A. Porém, a segunda derivada desta restrição não foi calculada de modo analítico.

Para aproximar a matriz Hessiana da restrição não-linear g foi utilizar o método de diferenças finitas (NOCEDAL; WRIGHT, 2006):

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{g(x + he_i + he_j) - g(x + he_i) - g(x + he_j) + g(x)}{h^2} \quad (88)$$

onde h é um escalar positivo pequeno e e_i é um vetor composto pelo elemento 1 na i -ésima posição e 0 nas demais posições. Note que a equação (88) avalia quatro vezes a função g . A aproximação da matriz Hessiana não se tornou viável quando requerida dentro do método de Pontos Interiores aplicado ao problema do despacho hidrotérmico, pois em cada iteração do método são feitas quatro avaliações da função g , o que torna-se computacionalmente caro à medida que a dimensão do problema aumenta. Além disso, em problemas menores, onde foi possível calcular esta matriz, observou-se que ela é bastante esparsa devido à modelagem adotada neste trabalho.

Logo, a ideia inicial foi a remoção do termo que envolve a matriz Hessiana da restrição g no método de Pontos Interiores. Testes computacionais comprovaram que

a ideia parece ser bastante promissora, reduzindo muito o tempo de execução do algoritmo e mantendo a precisão do método.

Portanto, o que está sendo feito neste trabalho é substituir a matriz \hat{H}^k no sistema reduzido (74), pela matriz \bar{H}^k dada pela relação:

$$\bar{H}^k = \nabla^2 f^k + C^T (W^k)^{-1} \Lambda_3^k C + (Y^k)^{-1} \Lambda_4^k + (Z^k)^{-1} \Lambda_5^k \quad (89)$$

ou seja, deixa-se de resolver o sistema (74) e procura-se agora a solução de:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}^k & (J_g^k)^T & A^T \\ J_g^k & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}^k \\ -F2^k \\ -F3^k \end{bmatrix} \quad (90)$$

A proposta de desconsiderar informações de segunda ordem pode ser comparada com a ideia do método de Gauss-Newton (DENNIS; SCHNABEL, 1996), que originalmente consiste na minimização do resíduo em quadrados mínimos, que é equivalente a um problema de minimização irrestrita (ou na resolução de um sistema de equações não-lineares). Em outras palavras, o método de Gauss-Newton faz uma aproximação da direção de Newton desprezando o termo que envolve a matriz Hessiana da função objetivo, e têm alcançado maior sucesso em problemas onde a matriz Hessiana não têm grande influência.

Por questão de clareza, a partir de agora está sendo suprimido o índice superescrito k .

Para que o sistema linear (90) tenha solução (GOLUB; VAN LOAN, 1996) é preciso que:

- i $[J_g \ A]^T$ tenha posto coluna completo;
- ii $\bar{H}(x)$ seja positiva definida.

A hipótese (i) está sendo suposta como verdadeira e a hipótese (ii) será provada a seguir.

Lema 4.3.1 *Sejam $W^{-1} = \text{diag}(w^{-1})$, $Y^{-1} = \text{diag}(y^{-1})$, $Z^{-1} = \text{diag}(z^{-1})$ e $\Lambda_3 = \text{diag}(\lambda_3)$, com $(w, y, z, \lambda_3) > 0$ dados em (45) e (46). Além disso, sejam $f(x)$ a função objetivo dada em (23) e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz dos coeficientes das restrições lineares de desigualdade do problema (43). Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- i $Y^{-1} > 0$ e $Z^{-1} > 0$, ou seja, são matrizes positivas definidas;
- ii $C^T W^{-1} \Lambda_3 C > 0$, ou seja, é positiva definida;
- iii $\nabla^2 f > 0$, ou seja, a matriz Hessiana de f é positiva definida.

Prova:

- i $Y^{-1} > 0$ e $Z^{-1} > 0$ são matrizes diagonais com elementos positivos, logo são positivas definidas;
- ii Seja $D = W^{-1} \Lambda_3$, então:

$$\begin{aligned} x^T C^T D C x &= x^T C^T D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} C x = x^T C^T \left(D^{\frac{1}{2}} \right)^T D^{\frac{1}{2}} C x = \left(D^{\frac{1}{2}} C x \right)^T \left(D^{\frac{1}{2}} C x \right) \\ &= \| D^{\frac{1}{2}} C x \|^2_2 > 0, \forall x \neq 0; \end{aligned}$$
- iii $\nabla^2 f$ é positiva definida, pois a função f é a soma de dois polinômios de segundo grau com os coeficientes dos termos quadráticos sendo positivos. Logo f é convexa e sua matriz Hessiana é positiva definida.

■

Teorema 4.3.1 *A matriz \bar{H} do sistema reduzido (74), dada na relação (89), é positiva definida.*

Prova: De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $x \neq 0$, então por (89):

$$\begin{aligned} x^T \bar{H} x &= x^T (\nabla^2 f + C^T W^{-1} \Lambda_3 C + Y^{-1} \Lambda_4 + Z^{-1} \Lambda_5) x \\ &= x^T \nabla^2 f x + x^T C^T W^{-1} \Lambda_3 C x + x^T Y^{-1} \Lambda_4 x + x^T Z^{-1} \Lambda_5 x \end{aligned}$$

Do Lema 4.3.1, segue que $x^T \bar{H} x$ é a soma de matrizes positivas definidas, logo

$$x^T \bar{H} x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

■

Nota 4.3.1 *Em sistemas com a estrutura de (74), nos quais não se pode garantir a positividade de \bar{H} , escolhe-se $\gamma > 0$ tal que $\tilde{H} = \bar{H} + \gamma I_d$ seja positiva definida (VAN-DEBEEI; SHANNO, 1999).*

4.4 ALGORITMO DE PONTOS INTERIORES

Com a metodologia já apresentada, pode-se escrever o algoritmo de Pontos Interiores utilizado neste trabalho:

Algoritmo 4.4.1

Dados $x^0, w^0, y^0, z^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0, \lambda_5^0, \rho^0, A, b, C, c, l, u$

Para $k = 0$

Enquanto não convergir (critério de parada não é satisfeito)

Encontrar parte da direção de Newton, solução do sistema (90)

Calcular as demais direções de Newton utilizando as equações (62)-(67)

Calcular os tamanhos de passos primal e dual utilizando as equações (84) e (85)

Atualizar as variáveis utilizando as equações (75)-(83)

Atualizar o parâmetro barreira utilizando a equação (87)

$k = k + 1$

Fim

5 DETALHES DE IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo serão abordados alguns detalhes, no ponto de vista de modelagem e também computacional, utilizados na implementação do método de Pontos Interiores para o problema do despacho hidrotérmico.

5.1 DIMENSIONAMENTO DAS VARIÁVEIS

As dimensões das variáveis envolvidas no problema (42) estão relacionadas na Tabela 2.

TABELA 2: Dimensão das variáveis do problema do despacho hidrotérmico

Variável	Dimensão
GT	$\mathbb{R}^{JT \times 1}$
V	$\mathbb{R}^{RT \times 1}$
QVT	$\mathbb{R}^{RT \times 1}$
QC	$\mathbb{R}^{RT \times 1}$
INT	$\mathbb{R}^{IT \times 1}$
DEF	$\mathbb{R}^{ST \times 1}$

FONTE: O autor (2011)

onde R é o número de reservatórios hidrelétricos e lembrando que J é o número de usinas térmicas, T é o último período do horizonte de otimização, S é o número de subsistemas e I é o número de linhas de intercâmbio.

Para explicar o dimensionamento das variáveis, toma-se como exemplo a variável Geração Térmica, que pode ser escrita como:

$$GT = (gt_{1,1}, gt_{2,1}, \dots, gt_{J,1}, gt_{1,2}, gt_{2,2}, \dots, gt_{J,2}, \dots, gt_{1,T}, gt_{2,T}, \dots, gt_{J,T})^T$$

onde $gt_{1,1}$ é a geração térmica da usina 1 no período 1, $gt_{2,1}$ a geração térmica da usina 2 no período 1 e assim sucessivamente até $gt_{J,T}$ a geração térmica da usina J para o último período considerado. Isto posto, tem-se que o vetor GT tem $JT \times 1$ componentes. De forma análoga, a dimensão das demais variáveis pode ser analisada.

5.2 MATRIZES E VETORES DO PROBLEMA

Recordando o problema do despacho hidrotérmico, conforme modelado no Capítulo 3:

$$\min \sum_{t=1}^T \omega_t \left[\sum_{j=1}^J CT_j(GT_{j,t}) + \sum_{s=1}^S CD_s(DEF_{s,t}) \right] \quad (91)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in J_s} GT_{j,t} + \sum_{r \in R_s} GH_{r,t} + \sum_{i \in I_s} INT_{i,t} = D_{s,t} - DEF_{s,t} \quad (92)$$

$$V_{r,t} \left(\frac{10^6}{S_{mês}} \right) = V_{r,t-1} \left(\frac{10^6}{S_{mês}} \right) + \sum_{l \in M_r} (QC_{l,t} + QVT_{l,t}) - QC_{r,t} - QVT_{r,t} + Y_{r,t} - \sum_{l \in M_r} Y_{l,t} \quad (93)$$

$$QVT_{r,t} + QC_{r,t} \geq Qmin_{r,t} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} GTmin_{j,t} &\leq GT_{j,t} \leq GTmax_{j,t} \\ Vmin_{r,t} &\leq V_{r,t} \leq Vmax_{r,t} \\ 0 &\leq QVT_{i,t} \leq QVTmax_i \\ QCmin_r &\leq QC_{r,t} \leq QCmax_r \\ INTmin_{i,t} &\leq INT_{i,t} \leq INTmax_{i,t} \\ 0 &\leq DEF_{s,t} \end{aligned} \quad (95)$$

O problema dado pelas equações (91)-(95) pode ser reescrito matematicamente, conforme trabalhado no Capítulo 4, da seguinte forma:

$$\min f(x) \quad (96)$$

Sujeito a:

$$g(x) = 0 \quad (97)$$

$$Ax = b \quad (98)$$

$$Cx \leq c \quad (99)$$

$$l \leq x \leq u \quad (100)$$

onde $x = [GT \ V \ QVT \ QC \ INT \ DEF]^T$.

5.2.1 Restrição de Balanço Hídrico

A restrição de balanço hídrico $Ax = b$ pode ser analisada via teoria de grafos. Intuitivamente, os nós representam as usinas hidrelétricas, em que de cada nó saem um arco que representa a defluência e outro que representa o volume. A Figura 6 representa uma cascata com 3 usinas hidrelétricas e 3 períodos.

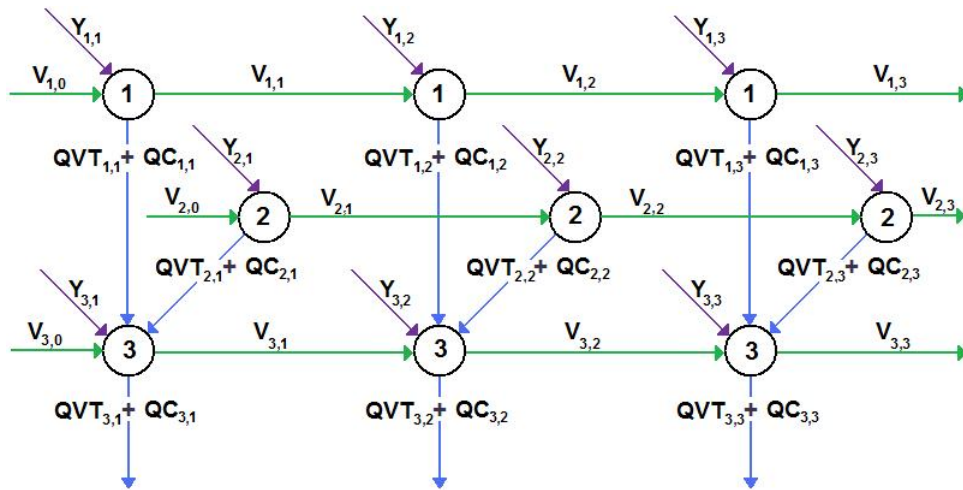


FIGURA 6: Restrição do balanço hídrico para uma cascata com 3 usinas e 3 períodos

FONTE: O autor (2011)

Para melhor entendimento, a equação do balanço hídrico

$$V_{r,t} - V_{r,t-1} + QC_{r,t} - QVT_{r,t} - \sum_{l \in M_r} (QC_{l,t} + QVT_{l,t}) = Y_{r,t} - \sum_{l \in M_r} Y_{l,t} \quad (101)$$

será reescrita para cada um dos 3 períodos sendo considerado os 3 reservatórios hidrelétricos. Aqui, para melhor clareza, será omitido o termo $\left(\frac{10^6}{S_{mês}}\right)$ que é multiplicado pelo volume nesta equação.

$$t = 1$$

$$r = 1, M_1 = \emptyset$$

$$v_{1,1} + qc_{1,1} + qvt_{1,1} = y_{1,1} + v_{1,0}$$

$$r = 2, M_2 = \emptyset$$

$$v_{2,1} + qc_{2,1} + qvt_{2,1} = y_{2,1} + v_{2,0}$$

$$r = 3, M_3 = 1, 2$$

$$v_{3,1} + (qc_{3,1} + qvt_{3,1}) - (qc_{1,1} + qvt_{1,1}) - (qc_{2,1} + qvt_{2,1}) = y_{3,1} - (y_{1,1} + y_{2,1}) + v_{3,0}$$

$$t = 2$$

$$r = 1, M_1 = \emptyset$$

$$v_{1,2} - v_{1,1} + qc_{1,2} + qvt_{1,2} = y_{1,2}$$

$$r = 2, M_2 = \emptyset$$

$$v_{2,2} - v_{2,1} + qc_{2,2} + qvt_{2,2} = y_{2,2}$$

$$r = 3, M_3 = 1, 2$$

$$v_{3,2} - v_{3,1} + (qc_{3,2} + qvt_{3,2}) - (qc_{1,2} + qvt_{1,2}) - (qc_{2,2} + qvt_{2,2}) = y_{3,2} - (y_{1,2} + y_{2,2})$$

$$t = 3$$

$$r = 1, M_1 = \emptyset$$

$$v_{1,3} - v_{1,2} + qc_{1,3} + qvt_{1,3} = y_{1,3}$$

$$r = 2, M_2 = \emptyset$$

$$v_{2,3} - v_{2,2} + qc_{2,3} + qvt_{2,3} = y_{2,3}$$

$$r = 3, M_3 = 1, 2$$

$$v_{3,3} - v_{3,2} + (qc_{3,3} + qvt_{3,3}) - (qc_{1,3} + qvt_{1,3}) - (qc_{2,3} + qvt_{2,3}) = y_{3,3} - (y_{1,3} + y_{2,3})$$

No lado esquerdo das equações acima, tem-se as variáveis do problema. Para cada variável pode-se associar uma matriz de coeficientes. Por exemplo, para a vari-

ável V , tem-se:

$$A_v V = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ -1 & & & 1 & & & & & \\ & -1 & & & 1 & & & & \\ & & -1 & & & 1 & & & \\ & & & -1 & & & 1 & & \\ & & & & -1 & & & 1 & \\ & & & & & -1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \\ v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ v_{3,2} \\ v_{1,3} \\ v_{2,3} \\ v_{3,3} \end{bmatrix}$$

Fazendo o mesmo para a variável QVT , tem-se que a matriz dos coeficientes é:

$$A_{qvt} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ -1 & -1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & -1 & -1 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz A_{qc} , referente à variável QC é idêntica à matriz A_{qvt} , pois estas variáveis aparecem igualmente na equação (101). As variáveis GT , INT e DEF não aparecem na restrição de balanço hídrico, logo $A_{gt} = 0 \in \mathbb{R}^{9 \times 3J}$, $A_{int} = 0 \in \mathbb{R}^{9 \times 3I}$ e $A_{def} = 0 \in \mathbb{R}^{9 \times 3S}$ para o exemplo. Portanto, a expressão Ax da equação (98) pode ser escrita como $A_v V + A_{qvt} QVT + A_{qc} QC$ e por isso, a matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_v & A_{qvt} & A_{qc} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

No lado direito da equação (101), tem-se o vetor constante, ou seja, na equação

(98), b é dado por:

$$b = \begin{bmatrix} y_{1,1} + v_{1,0} \\ y_{2,1} + v_{2,0} \\ y_{3,1} - (y_{1,1} + y_{2,1}) + v_{3,0} \\ y_{1,2} \\ y_{2,2} \\ y_{3,2} - (y_{1,2} + y_{2,2}) \\ y_{1,3} \\ y_{2,3} \\ y_{3,3} - (y_{1,3} + y_{2,3}) \end{bmatrix} \quad (103)$$

5.2.2 Restrição de Defluência Mínima

A restrição de defluência mínima é representada por $Cx \leq c$. Para que a equação (94) fique no formato de (99), basta multiplicá-la por (-1) , ou seja, tem-se:

$$-QVT_{r,t} - QC_{r,t} \leq -Qmin_{r,t} \quad (104)$$

Na equação (104), as variáveis envolvidas são somente QVT e QC . Com isso, a matriz C da restrição (99) para o exemplo com 3 hidrelétricas e 3 períodos é:

$$C = \begin{bmatrix} 0_{9 \times 9} & 0_{9 \times 9} & -I_d & -I_d & 0_{9 \times 3I} & 0_{9 \times 3S} \end{bmatrix} \quad (105)$$

onde I_d é a matriz identidade de tamanho 9×9 . O vetor constante c é dado por:

$$c = \begin{bmatrix} -qmin_{1,1} \\ -qmin_{2,1} \\ -qmin_{3,1} \\ -qmin_{1,2} \\ -qmin_{2,2} \\ -qmin_{3,2} \\ -qmin_{1,3} \\ -qmin_{2,3} \\ -qmin_{3,3} \end{bmatrix} \quad (106)$$

5.2.3 Limite das Variáveis

A equação que representa o limite das variáveis é $l \leq x \leq u$. Como já foi dito, $x = [GT \ V \ QVT \ QC \ INT \ DEF]^T$. Os limites l e u , de acordo com as equações (95) são:

$$l = \begin{pmatrix} GTmin \\ Vmin \\ 0 \\ QCmin \\ INTmin \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{pmatrix} GTmax \\ Vmax \\ QVTmax \\ QCmax \\ INTmax \\ +\infty \end{pmatrix}$$

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para discutir o desempenho da metodologia apresentada no Capítulo 4, foi escolhido um sistema teste, composto por 21 usinas hidrelétricas e 32 usinas termelétricas, distribuídas em 3 subsistemas. Dois períodos foram considerados: um período de afluições altas e um período de afluições baixas. Os subsistemas 3 e 4 não estão sendo considerados. A Figura 7 ilustra a distribuição das usinas hidráulicas por subsistema.

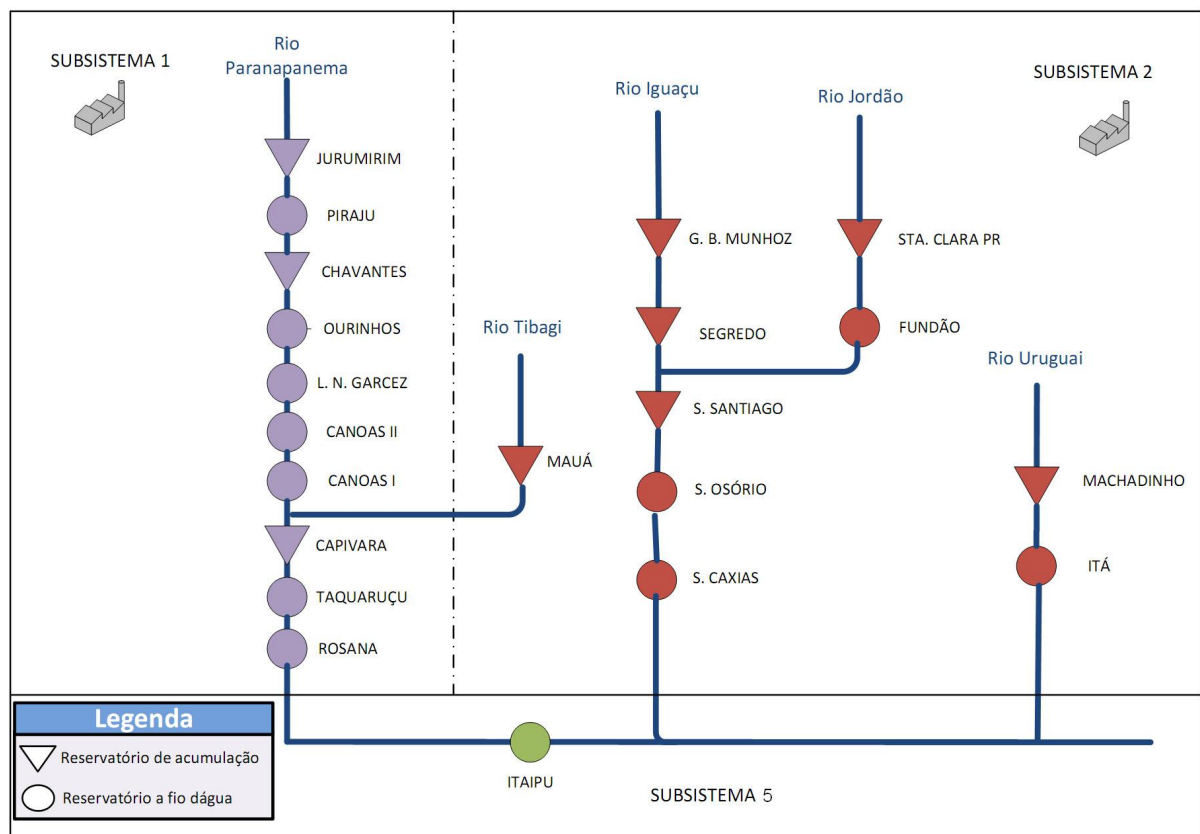


FIGURA 7: Distribuição das usinas hidráulicas por subsistema

FONTE: Adaptado de ONS (2009)

A Tabela 3 mostra a composição dos três subsistemas considerados.

TABELA 3: Usinas e demandas para o sistema considerado

Subsistema	n° hidros	n° térmicas	Demanda (MWmês)
1	10	18	13983
2	10	14	10903
5	1	0	0

FONTE: O autor (2011)

Para o sistema teste considerado, existem três linhas de intercâmbio entre os subsistemas (FIGURA 8).

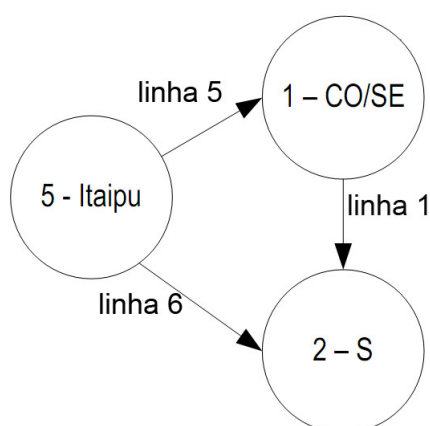


FIGURA 8: Subsistemas e linhas de intercâmbio entre eles

FONTE: O autor (2011)

A linha 1 tem duplo sentido e como convenção foi adotado o seguinte: valores positivos para o intercâmbio representam energia sendo transportada do subsistema 1 para o subsistema 2 e valores negativos representam transporte de energia do subsistema 2 para o subsistema 1. Já as linhas 5 e 6 têm sentido único: a energia gerada no subsistema 5 é distribuída para os demais subsistemas e não recebe energia de nenhum outro. Isto ocorre porque o subsistema 5 é composto por apenas 1 usina hidrelétrica, a saber, a usina de Itaipu, por isso é um subsistema puramente gerador de energia, não possuindo demanda, como pode ser observado na Tabela 3.

Para a realização dos testes foram adotadas algumas premissas: o ponto inicial

foi gerado através da resolução do sistema linear formado apenas pelas restrições lineares de igualdade e desigualdade através da função *linprog* do Matlab. Os volumes iniciais dos reservatórios são considerados iguais ao volume máximo e os volumes finais dos reservatórios são otimizados de modo a ficar entre 70% e 100% do volume máximo. O parâmetro barreira inicial foi tomado como sendo 100 e os multiplicadores de Lagrange ($\lambda_i, i = 1, \dots, 5$) e as variáveis de folga (w, y, z) foram inicializados como vetores com componentes uns de tamanhos apropriados. Como critério de parada foi adotado a satisfação das condições de KKT (51), com tolerância para o erro de 0,01. O algoritmo foi implementado no software Matlab 7.10.0 (R2010a) e foi executado em um computador Intel Core 2 Duo, 3.25 GB, HD 150 GB, Windows XP.

O primeiro teste realizado considera um período de aflúências altas, de janeiro de 1993 a dezembro de 1997.

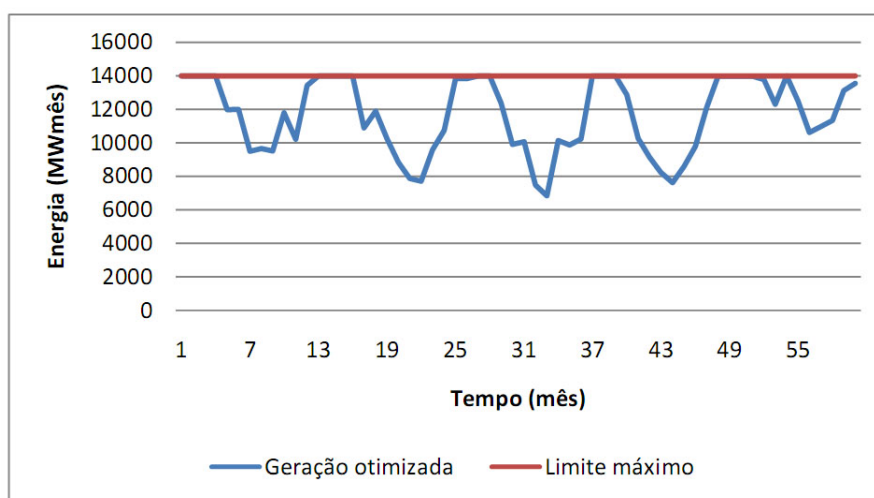


FIGURA 9: Geração hidráulica do subsistema 5

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 9 mostra a geração hidráulica do subsistema 5, isto é, da usina de Itaipu. Toda esta energia elétrica é transportada pelas linhas 5 e 6 para os subsistemas 1 e 2, respectivamente. O subsistema 5 não gera energia por térmicas.

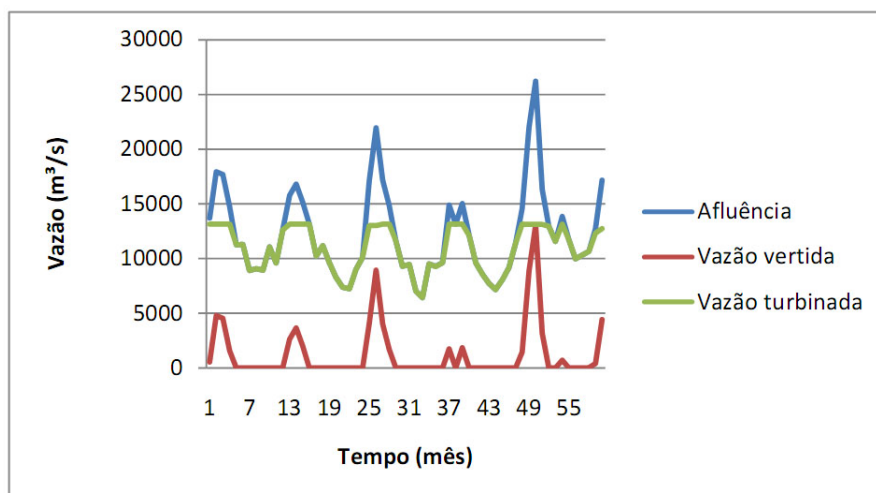


FIGURA 10: Balanço hídrico do subsistema 5

FONTE: O autor (2011)

No gráfico da Figura 10 é mostrada a quantidade de água que chega na usina de Itaipu (afluência), a quantidade que é aproveitada para geração de energia (vazão turbinada) e a quantidade que é vertida, isto é, que não é aproveitada. Observa-se que onde há picos de afluências houve geração máxima de energia e vertimentos elevados.

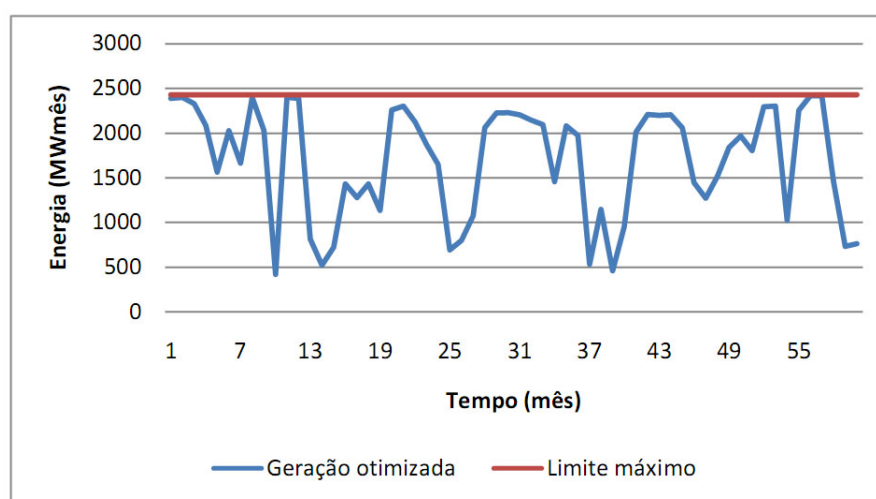


FIGURA 11: Geração hidráulica do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

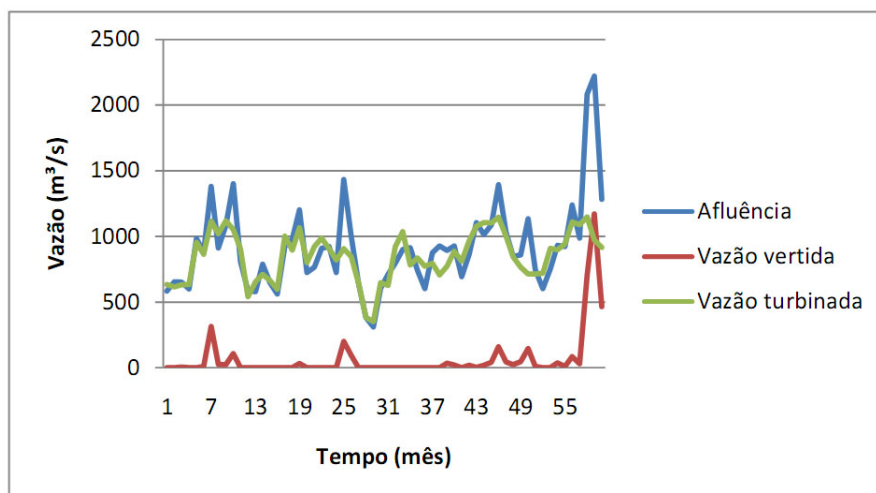


FIGURA 12: Balanço hídrico do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 11 mostra a soma da energia gerada pelas 10 usinas hidráulicas pertencentes ao subsistema 1. Esta geração de energia é bastante irregular, tendo picos de alta e baixa geração. Um dos fatores de ocorrências destes picos de geração é a afluência média do subsistema, conforme pode ser visto na Figura 12. A afluência mostrada na Figura 12 é a média das afluências de todas as 10 hidrelétricas do subsistema. Também é feita a média das vazões vertida e turbinada. Novamente pode ser observado que o vertimento ocorre em períodos de alta afluência.

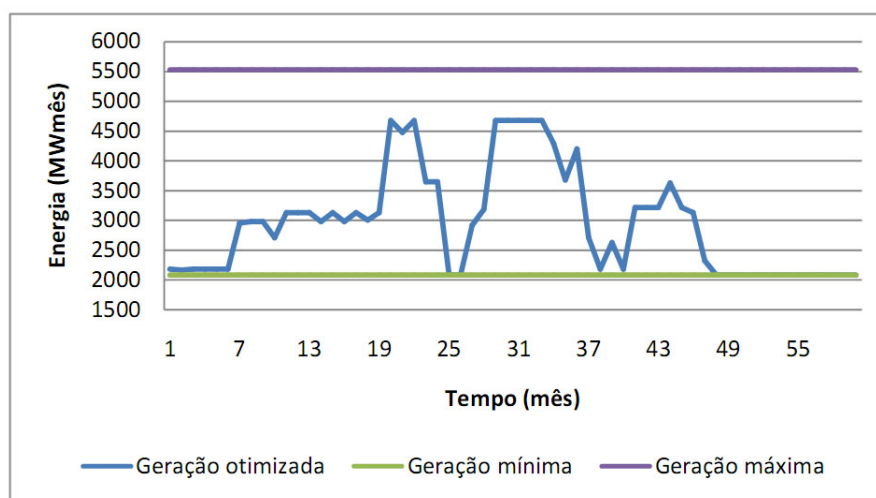


FIGURA 13: Geração térmica do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 13 mostra a soma da energia gerada pelas 18 usinas termelétricas pertencentes ao subsistema 1. Em diversos períodos (de altas afluições), as usinas termelétricas operaram em seus limites inferiores, isto é, produziram quantidade mínima de energia.

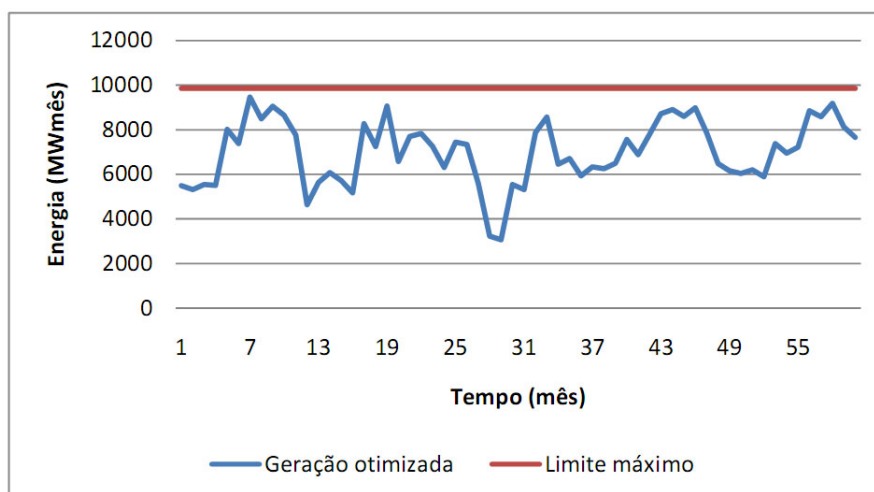


FIGURA 14: Geração hidráulica do subsistema 2
 FONTE: O autor (2011)

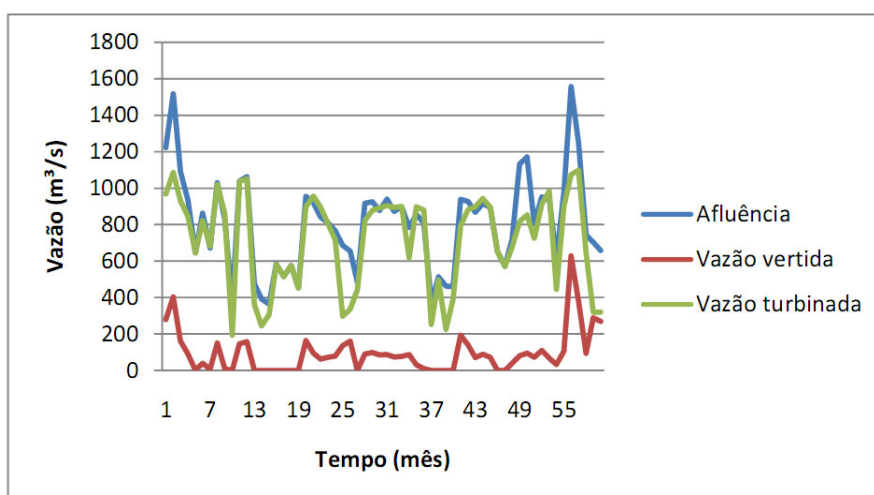


FIGURA 15: Balanço hídrico do subsistema 2
 FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 14 apresenta a soma da geração hidráulica das 10 usinas do subsistema 2. As médias de afluição, vazão vertida e turbinada do subsistema 2 são

mostradas no gráfico da Figura 15. O padrão de vertimento em períodos de grande afluência é observado.

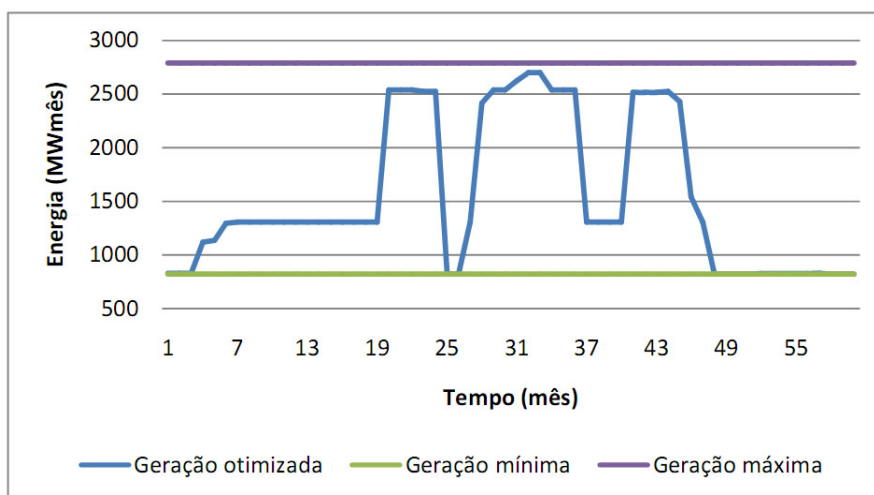


FIGURA 16: Geração térmica do subsistema 2

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 16 mostra a soma da energia gerada pelas 14 termelétricas do subsistema 2. Mais uma vez, nota-se que as termelétricas foram pouco exigidas nos períodos de afluências elevadas.

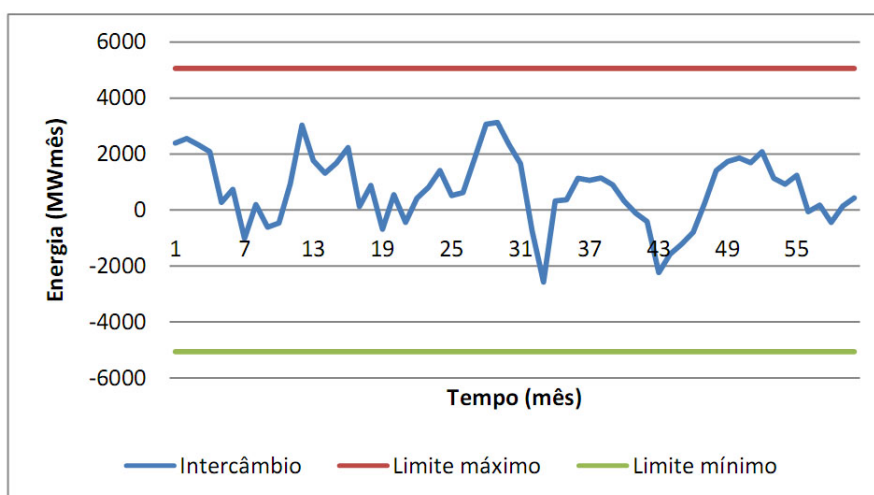


FIGURA 17: Intercâmbio de energia entre os subsistemas 1 e 2

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 17 apresenta a troca de energia entre os subsistemas 1 e 2

através da linha de transmissão de energia 1. Valores positivos para o intercâmbio significam que a energia foi gerada no subsistema 1 e foi transportada para o subsistema 2; valores negativos representam o contrário, isto é, energia saindo do subsistema 2 e chegando no subsistema 1. Observa-se que o subsistema 1 mandou mais energia para o subsistema 2 do que recebeu dele.

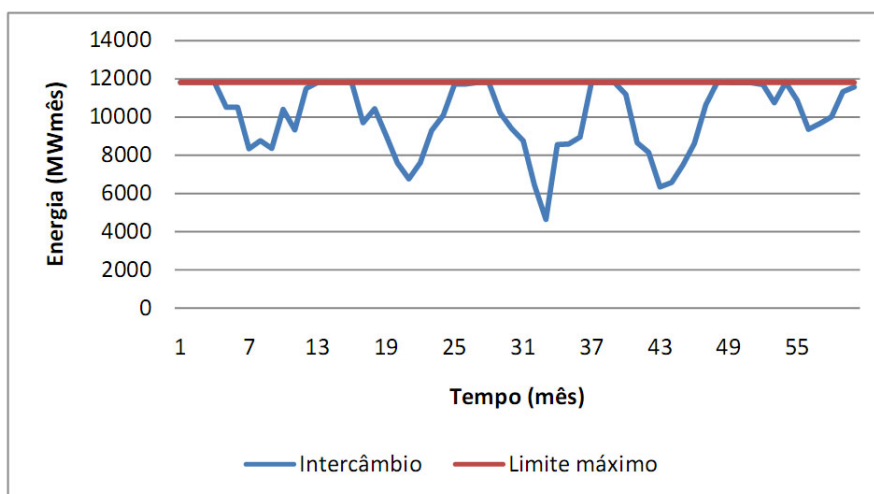


FIGURA 18: Energia enviada do subsistema 5 para o subsistema 1
 FONTE: O autor (2011)

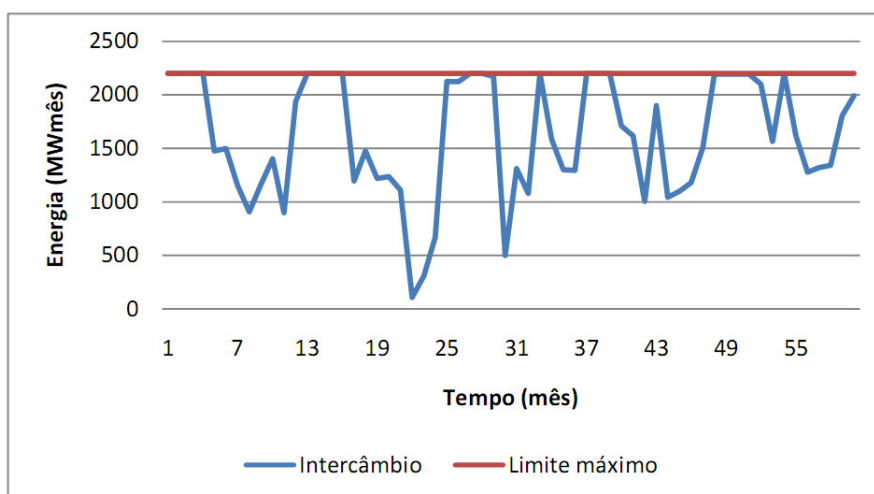


FIGURA 19: Energia enviada do subsistema 5 para o subsistema 2
 FONTE: O autor (2011)

Os gráficos das Figuras 18 e 19 apresentam a energia hidráulica enviada pelo subsistema 5 para os subsistemas 1 e 2, respectivamente.

Não houve déficit de energia, pois as demandas dos subsistemas foram totalmente atendidas.

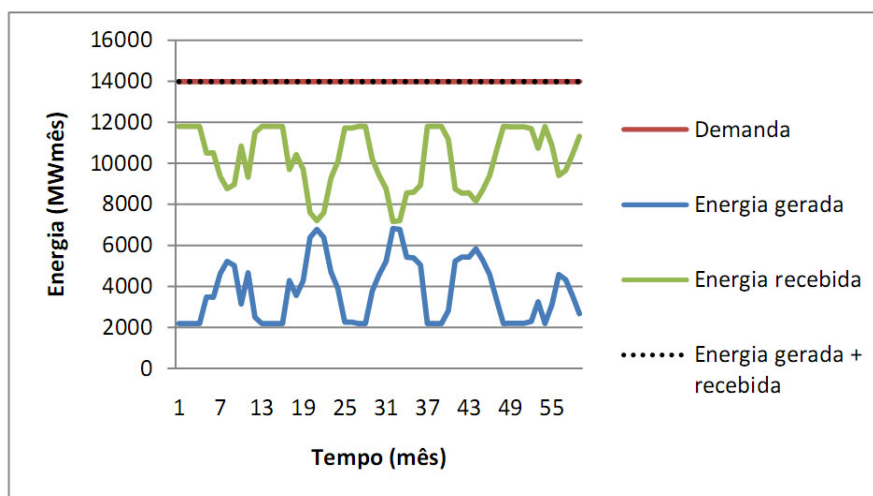


FIGURA 20: Balanço de energia e demanda do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

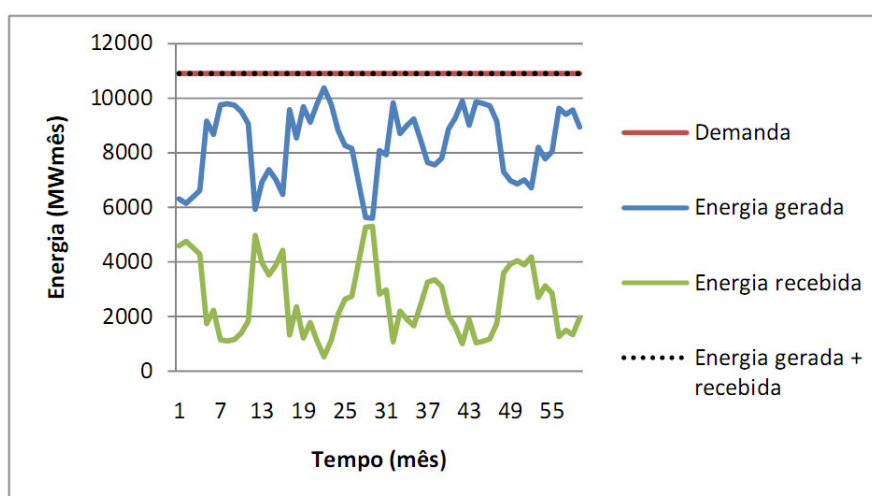


FIGURA 21: Balanço de energia e demanda do subsistema 2

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 20 mostra a quantidade de energia gerada no subsistema 1 e que foi usada por ele, a quantidade de energia recebida dos demais subsistemas e a soma destas energias resultando exatamente na demanda do subsistema 1. O gráfico da Figura 21 têm análise análoga para o subsistema 2.

Para este exemplo, a função objetivo ficou em R\$ 10.695.000,00 que foi o custo da geração térmica, pois não houve custo de déficit. O tempo de processamento foi de aproximadamente 15 minutos.

O segundo teste realizado considera um período de baixas afluições, de janeiro de 1952 a dezembro de 1956.

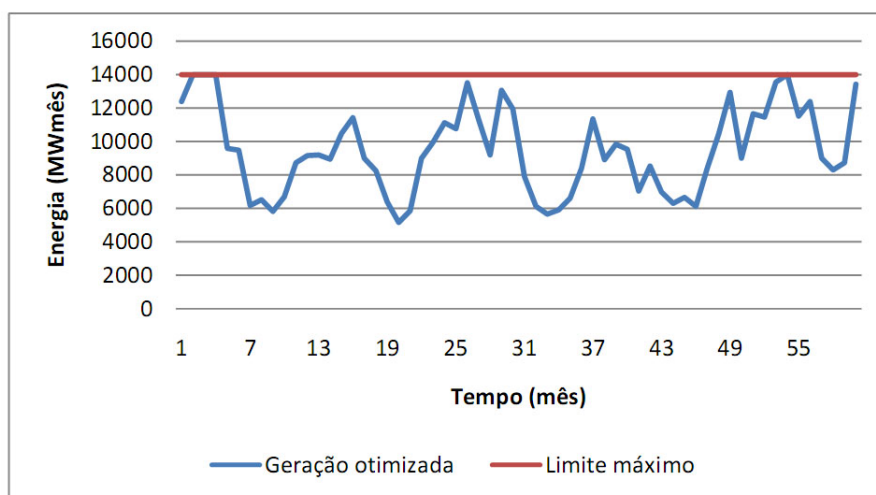


FIGURA 22: Geração hidráulica do subsistema 5

FONTE: O autor (2011)

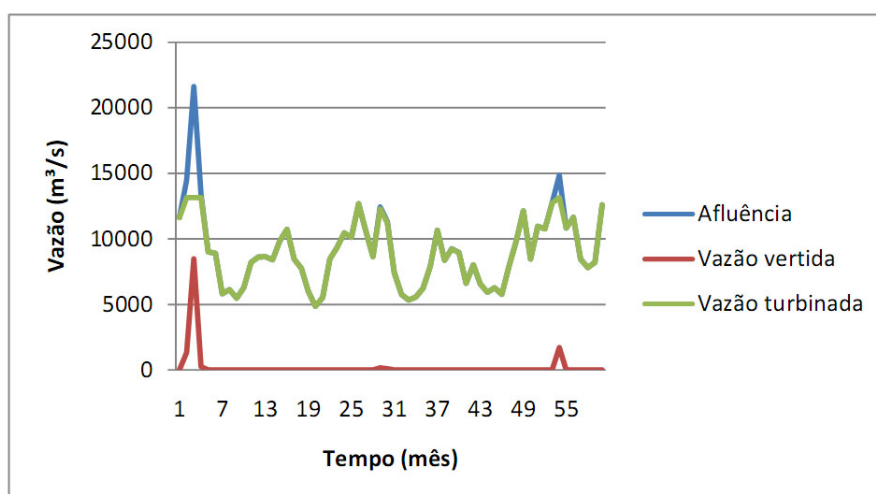


FIGURA 23: Balanço hídrico do subsistema 5

FONTE: O autor (2011)

Os gráficos das Figuras 22 e 23 mostram respectivamente a geração hidráulica e o

balanço de água da usina de Itaipu. Pode-se notar que a usina aproveita toda a água afluente para geração, respeitando o limite de turbinamento que é de 13260 MWmês .

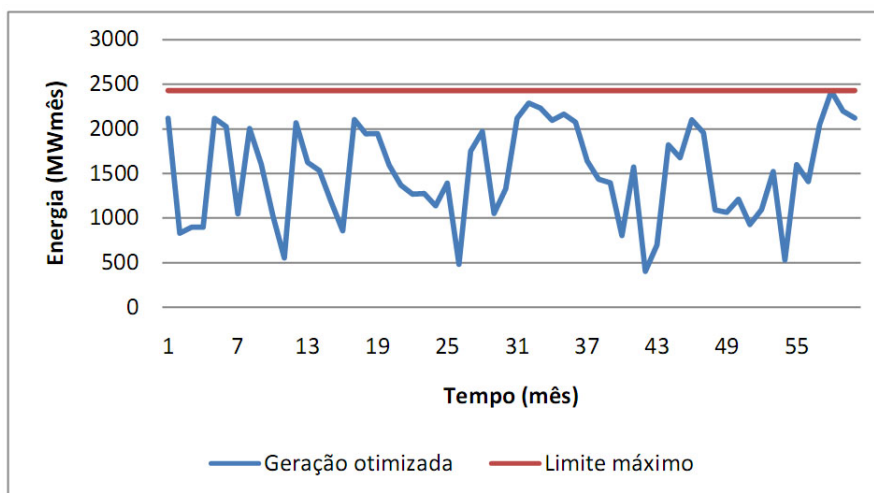


FIGURA 24: Geração hidráulica do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

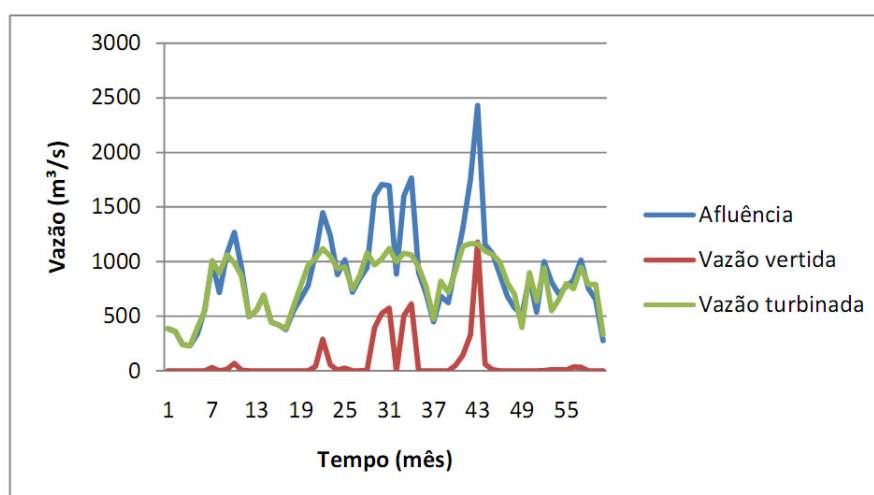


FIGURA 25: Balanço hídrico do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

Os gráficos das Figuras 24 e 25 mostram respectivamente a soma da geração das usinas hidráulicas e o balanço hídrico médio do subsistema 1. Novamente, pode-se observar o aproveitamento máximo de água para geração energética.

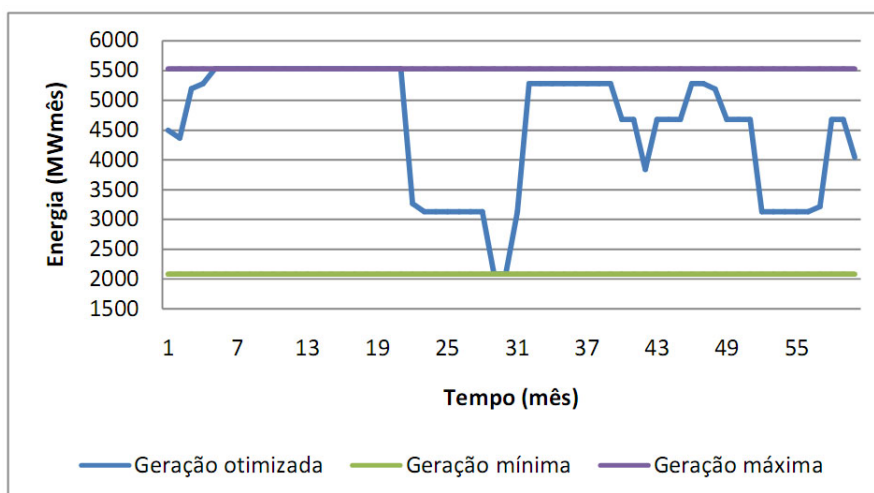


FIGURA 26: Geração térmica do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

A soma da geração térmica do subsistema 1 é mostrada no gráfico da Figura 26. Nota-se que as usinas térmicas foram bastante exigidas neste período, devido às baixas afluências.

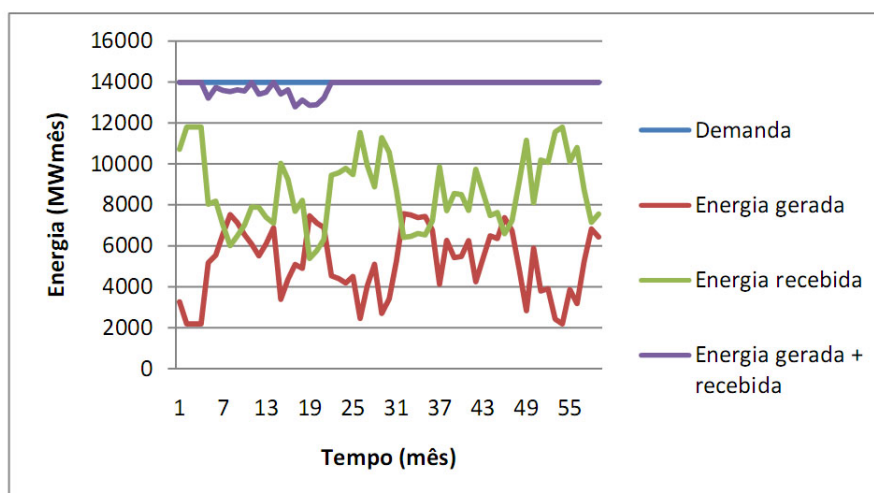


FIGURA 27: Balanço de energia e demanda do subsistema 1

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 27 mostra a quantidade de energia gerada no subsistema 1 e que foi usada por ele, a quantidade de energia recebida dos demais subsistemas, a soma destas duas energias e a demanda do subsistema. Diferentemente do período

de 1952 a 1956 apresentado anteriormente, a demanda não foi atendida, isto é, a energia que o próprio subsistema 1 gerou e não enviou mais a energia recebida pelo intercâmbio não foram suficientes para satisfazer a demanda. A diferença entre a reta que representa a demanda com a curva que representa a soma da energia gerada e recebida pode ser interpretada como o déficit do período. Este déficit de energia justifica-se pelo fato de o período ser de baixas afluências.

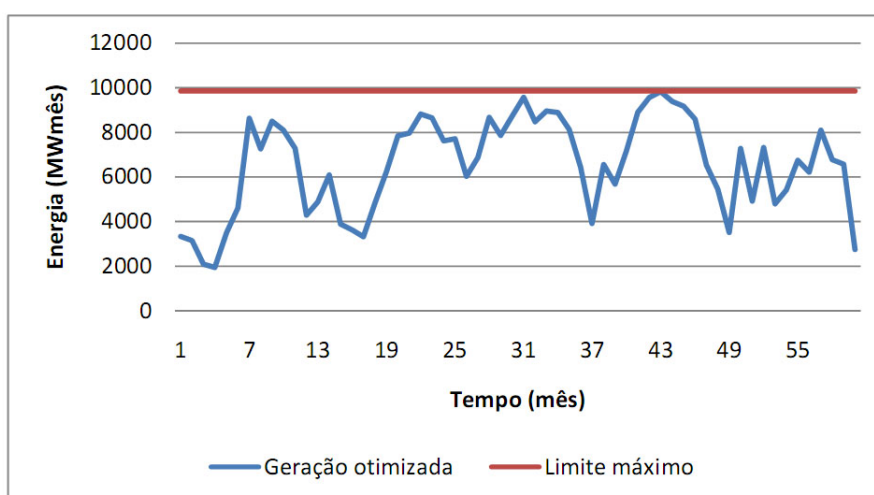


FIGURA 28: Geração hidráulica do subsistema 2

FONTE: O autor (2011)

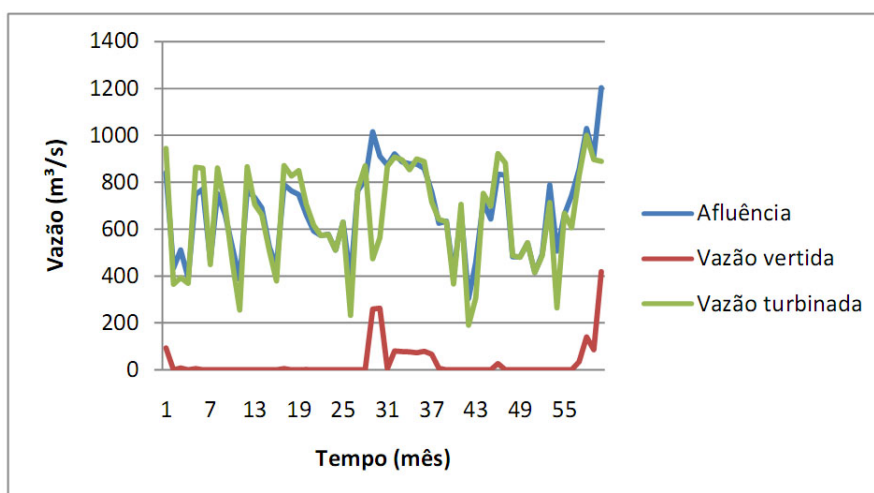


FIGURA 29: Balanço hídrico do subsistema 2

FONTE: O autor (2011)

Os gráficos das Figuras 28 e 29 mostram respectivamente a soma da geração das usinas hidráulicas e o balanço hídrico médio do subsistema 2. Basicamente, toda a afluência foi turbinada, vertendo pouca quantidade de água.

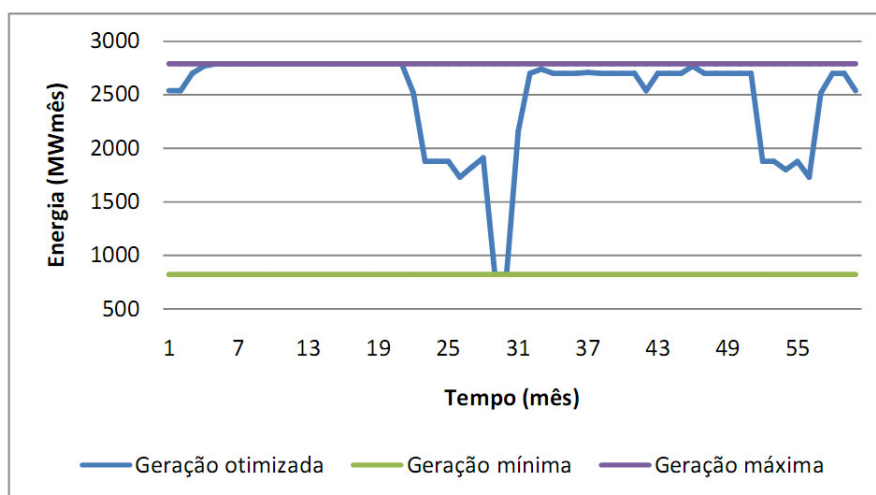


FIGURA 30: Geração térmica do subsistema 2

FONTE: O autor (2011)

A soma da geração térmica do subsistema 2 é mostrada no gráfico da Figura 30. No subsistema 2, as termelétricas também foram bastante exigidas e em muitos períodos operaram em sua capacidade máxima.

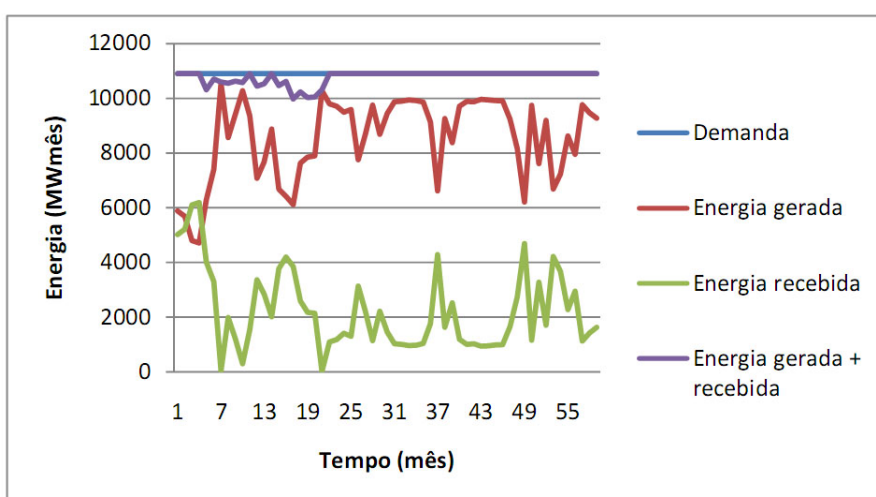


FIGURA 31: Balanço de energia e demanda do subsistema 2

FONTE: O autor (2011)

O gráfico da Figura 31 mostra o balanço de energia do subsistema 2. Assim como no subsistema 1, a demanda não pôde ser atendida, gerando déficit de energia.

Para este exemplo, a função objetivo ficou em R\$ $2.2795e+010$ que foi o custo da geração térmica mais o custo de déficit de energia. O tempo de processamento foi de aproximadamente 45 minutos.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Problemas não-lineares práticos, geralmente de grande porte, por serem de difícil tratamento e, conseqüentemente difícil resolução, muitas vezes são manipulados de modo a simplificar ao máximo sua modelagem e, na maioria das vezes, são linearizados. O problema do despacho hidrotérmico, como modelado neste trabalho, visou a simplificação o mínimo possível, a fim de manter as características reais do problema. Não impor restrições para tornar o problema separável no sentido de resolver um sub-problema por reservatório (tornando o problema mais simples, entretanto perdendo qualidade pois existem diversos reservatórios em cascata onde a política adotada em um reservatório influencia diretamente nos outros da mesma cascata) também foi um critério adotado durante a modelagem do problema. Esta simplificação mais reduzida do modelo energético resultou em um problema de minimização de uma função objetivo real não-linear respeitando restrições formadas por funções vetoriais lineares e não-lineares. Além de não-linear, o problema é não-convexo e de grande porte, as matrizes envolvidas são esparsas e a dessemelhança nas dimensões de variáveis envolvidas em uma mesma equação são complicadores para sua resolução.

O método de Pontos Interiores não-linear foi a metodologia escolhida para resolver tal problema, pois ele é usado com sucesso no ramo energético. A grande desvantagem deste método é o requerimento das derivadas de primeira e segunda ordem das funções envolvidas no problema. Somente a matriz Hessiana das restrições não-lineares não foi calculada analiticamente e sua aproximação também não foi computacionalmente viável. Porém, através de testes com problemas pequenos, constatou-se que esta matriz é bastante esparsa e sua remoção dos cálculos dentro da metodologia de Pontos Interiores não afetou de modo significativo os resultados finais. Notou-se uma grande dificuldade em escolher os parâmetros iniciais, especial-

mente o parâmetro barreira, bastante sensível.

Do ponto de vista energético, pode-se dizer que a metodologia proposta foi bastante satisfatória em relação aos testes realizados. Todos os limites de geração, de capacidade dos reservatórios e de linhas de intercâmbio foram respeitados. Observou-se que a energia proveniente das usinas térmicas só foi necessária em períodos onde as afluições foram baixas.

Do ponto de vista matemático, observou-se maior dificuldade em resolver o problema quando o período considerado foi de baixas afluições. Como há menos recursos do que quando as afluições são altas, as restrições são mais difíceis de serem satisfeitas, especialmente a restrição de atendimento à demanda.

Como perspectivas futuras, propõem-se que:

- A metodologia preditor-corretor de Pontos Interiores seja implementada para resolver o problema energético;
- Utilizar outras funções barreiras na metodologia;
- Implementar a metodologia proposta em linguagens de programação mais robustas;
- Explorar melhor a estrutura esparsa da matriz dos coeficientes do sistema linear de Newton;
- Adaptar melhor os parâmetros iniciais, buscando melhores resultados numéricos e computacionais.

REFERÊNCIAS

AKROTIRIANAKIS, I.; RUSTEM, B. **A globally convergent interior point algorithm for general non-linear programming problems**. 1997. Technical report.

ANEEL. **Atlas de Energia Elétrica do Brasil**. 2008. [Online; acesso em 16-Dezembro-2011]. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/arquivos/PDF/atlas3ed.pdf>>.

AZEVEDO, A. T. **Método de pontos interiores aplicados em sistemas de potência modelados por fluxos em redes**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2006.

BAHRAMI, K. A.; CALDWELL, R. W. **Electric utility systems application of dispersed storage and generation**. Vancouver: Proceedings of the IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, 1979.

BARBOZA, L. V. Método não-linear de pontos interiores aplicado à minimização de perdas em sistemas de potência. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA)**, v. 7, p. 189–200, 2006.

BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, p. 238–252, 1962.

BOCANEGRA, S. **Algoritmos de Newton-Krylov preconditionados para métodos de pontos interiores**. Tese (Doutorado) — Universidade de Minas Gerais, 2005.

CARVALHO, L. M. R. **Método de pontos interiores aplicados ao pré-despacho de um sistema hidrotérmico usando o princípio de mínimo esforço - comparação com o modelo de fluxo em redes**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2005.

CEPEL. **Manual de Referência do modelo NEWAVE**. [S.l.], 1999.

CONTIJO, E. A.; ROCHA, V. F. **Revisão das séries de vazões naturais nas principais bacias hidrográficas do Sistema Interligado Nacional**. João Pessoa: Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, 2009.

DENNIS, J. E.; SCHNABEL, S. A. **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**. Philadelphia: SIAM, 1996.

DUTRA, A. S. **Método de pontos interiores aplicado a um problema de sequenciamento Job-Shop**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, 2004.

EL-BAKRY, A. S. *et al.* On the formulation and theory of the newton interior-point method for nonlinear programming. **Journal of Optimization Theory and Application**, v. 89, p. 309–332, 1996.

FIACCO, A. V.; MCCORMICK, G. P. **Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques**. New York: John Wiley & Sons, 1968.

FLETCHER, R. **Practical methods of optimization**. New York: John Wiley & Sons, 1986.

FORTUNATO, L. A. M. *et al.* **Introdução ao planejamento da expansão e operação de sistemas de produção de energia elétrica**. Niterói: EDUFF-Editora Universitária, 1990.

FRANCO, P. E. C. **Planejamento da operação de curto prazo em sistemas hidrelétricos de potência por modelo de fluxo em redes**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 1993.

FRIEDLANDER, A. **Elementos de programação não-linear**. Campinas: Editora da Unicamp, 1994.

FRISCH, K. R. **The logarithmic potential method of convex programming**. Oslo: Unpublished manuscript, 1955.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix computations**. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1996.

GONDZIO, J.; GROTHEY, A. **Exploiting structure in parallel implementation of interior-point methods for optimization**. 2004. Technical report.

GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior-point method. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 9, p. 136–146, 1994.

KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. **Combinatorica**, v. 4, p. 373–395, 1984.

KOZAKEVICH, D. N. **Sistema não lineares da Física e Engenharia**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 1995.

LORA, E. E. S.; NASCIMENTO, M. A. R. **Geração Termelétrica. Planejamento, Projeto e Operação**. Rio de Janeiro: Interciência, 2004.

LUENBERGER, D. G. **Linear and nonlinear programming**. New York: Springer, 2005.

LUSTIG, I. J.; MARSTEN, R. E.; SHANNO, D. F. Computational experience with a primal-dual interior-point method for linear programming. **Linear Algebra and its Applications**, v. 152, p. 191–222, 1991.

MACGILL, I. F.; KAYE, R. J. Decentralised coordination of power system operation using dual evolutionary programming. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 14, p. 112–119, 1999.

MARIANO, C. R. **Estudo e análise do desempenho do método barreira modificada**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2006.

MARSTEN, R. E.; SALTZMAN, M. J. Implementation of dual affine interior point algorithm for linear programming. **ORSA Journal on Computing**, v. 1, p. 287–297, 1989.

MARTÍNEZ, J. M.; SANTOS, S. A. **Métodos computacionais de otimização**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

MEDINA, J.; QUINTANA, V. H.; CONEJO, A. J. A new clipping-off interior-point algorithm to solve the medium-term hydro-thermal coordination problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 13, p. 266–273, 1999.

MEGIDDO, N. Pathways to the optimal set in linear programming. In: _____. **Progress in Mathematical Programming**. New York: Springer-Verlag, 1986. p. 131–158.

MEHROTRA, S. On the implementation of a primal-dual interior point method. **Journal on Optimization**, v. 2, p. 575–601, 1992.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 2006.

OLIVEIRA, M. L. **Método de pontos interiores com técnicas de região de garantia para resolver o problema de fluxo de potência ótimo reativo**. 2008. Relatório técnico.

ONS. **Operador Nacional do Sistema Elétrico**. 2009. [Online; acesso em 01-Fevereiro-2012]. Disponível em: <http://www.ons.org.br/conheca_sistema/pop_diagrama_esquemat_usinas.aspx>.

PEREIRA, M. V. F. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. **International Journal of Electric Power and Energy Systems**, v. 11, p. 161–169, 1989.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: a decomposition approach. **Water Resources Research**, v. 21, p. 779–792, 1985.

POLYAK, R. A. Modified barrier functions. **Mathematical Programming: Series A and B**, v. 54, p. 177–222, 1992.

PROBST, R. W. **Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidrotérmico**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2006.

QUINTANA, V. H.; TORRES, G. L. An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 13, p. 1211–1218, 1998.

SHAMANSKI, V. E. A modification of newton's method. **Ukrain Mat. Z.**, v. 19, p. 133–138, 1967.

SOUZA, M. A. S.; BALBO, A. R.; BAPTISTA, E. C. Aplicação de um método primal-dual de pontos interiores, do tipo previsor-corretor com procedimento de busca unidimensional em problemas de despacho econômico. In: **7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications**. [S.l.: s.n.], 2008.

TVA. **Tennessee Valley Authority**. 2011. [Online; acesso em 20-Março-2011]. Disponível em: <<http://http://www.tva.com/power/hydro.htm>>.

VANDERBEI, R. J.; SHANNO, D. F. An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming. **Computational Optimization and Applications**, v. 13, p. 231–252, 1999.

WRIGHT, S. J. **Primal-dual interior-point methods**. Philadelphia: SIAM, 1997.

WU, Y. C.; DERBS, A. S.; MARSTEN, R. E. A direct nonlinear predictor corrector primal dual interior point algorithm for optimal power flows. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 9, p. 876–883, 1994.

YPMA, T. J. Historical development of the newton-raphson method. **SIAM Review**, v. 37, p. 531–551, 1995.

APÊNDICE A – DERIVADAS ANALÍTICAS DAS FUNÇÕES ENVOLVIDAS

Neste apêndice, serão vistas as derivadas analíticas das funções envolvidas no problema do despacho hidrotérmico (42).

A.1 GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO

A equação a ser derivada é:

$$f(GT, V, QVT, QC, INT, DEF) = \sum_{t=1}^T \omega_t \left[\sum_{j=1}^J CT_j(GT_{j,t}) + \sum_{s=1}^S CD_s(DEF_{s,t}) \right]$$

onde CT e CD são polinômios de segunda ordem e podem ser expressos como:

$$CT_j(y) = a_{j,0} + a_{j,1}y + a_{j,2}y^2 \quad \text{e} \quad CD_s(y) = b_{s,0} + b_{s,1}y + b_{s,2}y^2.$$

Busca-se encontrar:

$$\nabla f(GT, V, QVT, QC, INT, DEF) = \left[\frac{\partial f}{\partial GT} \quad \frac{\partial f}{\partial V} \quad \frac{\partial f}{\partial QVT} \quad \frac{\partial f}{\partial QC} \quad \frac{\partial f}{\partial INT} \quad \frac{\partial f}{\partial DEF} \right]^T$$

Note que as variáveis V , QVT , QC e INT não aparecem na expressão a ser derivada, logo a derivada com respeito a estas variáveis é zero, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial V} = 0 \in \mathbb{R}^{RT \times 1}, \quad \frac{\partial f}{\partial QVT} = 0 \in \mathbb{R}^{RT \times 1}, \quad \frac{\partial f}{\partial QC} = 0 \in \mathbb{R}^{RT \times 1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial INT} = 0 \in \mathbb{R}^{IT \times 1}$$

As derivadas com respeito às variáveis GT e DEF são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial GT_{j,t}} = \omega_t (a_{j,1} + 2a_{j,2}GT_{j,t}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial DEF_{s,t}} = \omega_t (b_{s,1} + 2b_{s,2}DEF_{s,t})$$

Dessa forma, tem-se:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \omega_t(a_{j,1} + 2a_{j,2}GT_{j,t}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_t(b_{s,1} + 2b_{s,2}DEF_{s,t}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

A.2 MATRIZ HESSIANA DA FUNÇÃO OBJETIVO

A matriz Hessiana da função objetivo é dada por:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial GT^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial GT \partial V} & \frac{\partial^2 f}{\partial GT \partial QVT} & \frac{\partial^2 f}{\partial GT \partial QC} & \frac{\partial^2 f}{\partial GT \partial INT} & \frac{\partial^2 f}{\partial GT \partial DEF} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial GT} & \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial QVT} & \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial QC} & \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial INT} & \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial DEF} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial QVT \partial GT} & \frac{\partial^2 f}{\partial QVT \partial V} & \frac{\partial^2 f}{\partial QVT^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial QVT \partial QC} & \frac{\partial^2 f}{\partial QVT \partial INT} & \frac{\partial^2 f}{\partial QVT \partial DEF} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial QC \partial GT} & \frac{\partial^2 f}{\partial QC \partial V} & \frac{\partial^2 f}{\partial QC \partial QVT} & \frac{\partial^2 f}{\partial QC^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial QC \partial INT} & \frac{\partial^2 f}{\partial QC \partial DEF} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial INT \partial GT} & \frac{\partial^2 f}{\partial INT \partial V} & \frac{\partial^2 f}{\partial INT \partial QVT} & \frac{\partial^2 f}{\partial INT \partial QC} & \frac{\partial^2 f}{\partial INT^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial INT \partial DEF} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial DEF \partial GT} & \frac{\partial^2 f}{\partial DEF \partial V} & \frac{\partial^2 f}{\partial DEF \partial QVT} & \frac{\partial^2 f}{\partial DEF \partial QC} & \frac{\partial^2 f}{\partial DEF \partial INT} & \frac{\partial^2 f}{\partial DEF^2} \end{bmatrix}$$

Entretanto, esta matriz é bastante esparsa, e os únicos elementos diferentes de zero são $\frac{\partial^2 f}{\partial GT^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial DEF^2}$, dados por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial GT^2} = [2a_{j,2}\omega_t] \in \mathbb{R}^{JT \times JT} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial DEF^2} = [2b_{s,2}\omega_t] \in \mathbb{R}^{S \times S}$$

Dessa forma, tem-se:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial GT^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial DEF^2} \end{bmatrix}$$

A.3 MATRIZ JACOBIANA DA RESTRIÇÃO DE ATENDIMENTO À DEMANDA

Para o cálculo das derivadas das restrições de atendimento à demanda, são consideradas restrições do tipo:

$$g_{s,t}(x) = D_{s,t} - \sum_{j \in J_s} GT_{j,t} - \sum_{r \in R_s} GH_{r,t} - \sum_{i \in I_s} INT_{i,t} - DEF_{s,t}$$

A matriz Jacobiana dessas restrições é dada por:

$$\nabla_{g_{s,t}}(x) = \left(\frac{\partial g_{s,t}}{\partial GT_{j,t}} \quad \frac{\partial g_{s,t}}{\partial V_{r,t}} \quad \frac{\partial g_{s,t}}{\partial QVT_{r,t}} \quad \frac{\partial g_{s,t}}{\partial QC_{r,t}} \quad \frac{\partial g_{s,t}}{\partial INT_{i,t}} \quad \frac{\partial g_{s,t}}{\partial DEF_{s,t}} \right) \in \mathbb{R}^{ST \times n}$$

A seguir são descritas cada uma das partes que compõem a matriz Jacobiana.

A.3.1 Derivada em relação a GT

A derivada em relação à variável GT é dada por:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial GT_{j,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial GT_{j,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial GT_{j,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial GT_{j,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ST \times JT}$$

onde $\frac{\partial g_{s,1}}{\partial GT_{j,1}} = \frac{\partial g_{s,2}}{\partial GT_{j,2}} = \dots = \frac{\partial g_{s,T}}{\partial GT_{j,T}}$ e

$$\frac{\partial g_{s,1}}{\partial GT_{j,1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{1,1}}{\partial GT_{1,1}} & \frac{\partial g_{1,1}}{\partial GT_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{1,1}}{\partial GT_{J,1}} \\ \frac{\partial g_{2,1}}{\partial GT_{1,1}} & \frac{\partial g_{2,1}}{\partial GT_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{2,1}}{\partial GT_{J,1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{S,1}}{\partial GT_{1,1}} & \frac{\partial g_{S,1}}{\partial GT_{2,1}} & \vdots & \frac{\partial g_{S,1}}{\partial GT_{J,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S \times J}$$

sendo $\frac{\partial g_{s,t}}{\partial GT_{j,t}} = -1$ para as usinas j que pertencem ao subsistema s .

A.3.2 Derivada em relação a INT

A derivada em relação à variável INT tem a forma:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial INT_{i,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial INT_{i,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial INT_{i,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial INT_{i,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ST \times JT}$$

onde $\frac{\partial g_{s,1}}{\partial INT_{i,1}} = \frac{\partial g_{s,2}}{\partial INT_{i,2}} = \dots = \frac{\partial g_{s,T}}{\partial INT_{i,T}}$ e

$$\frac{\partial g_{s,1}}{\partial INT_{i,1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{1,1}}{\partial INT_{1,1}} & \frac{\partial g_{1,1}}{\partial INT_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{1,1}}{\partial INT_{I,1}} \\ \frac{\partial g_{2,1}}{\partial INT_{1,1}} & \frac{\partial g_{2,1}}{\partial INT_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{2,1}}{\partial INT_{I,1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{S,1}}{\partial INT_{1,1}} & \frac{\partial g_{S,1}}{\partial INT_{2,1}} & \vdots & \frac{\partial g_{S,1}}{\partial INT_{I,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S \times J}$$

onde $\frac{\partial g_{s,1}}{\partial INT_{i,1}} = \begin{cases} 1 & \text{se o interc\u00e2mbio sai do subsistema } s \\ -1 & \text{se o interc\u00e2mbio entra no subsistema } s \end{cases}$

A.3.3 Derivada em rela\u00e7\u00e3o a DEF

Em rela\u00e7\u00e3o \u00e0 vari\u00e1vel DEF , tem-se:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial DEF_{s,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial DEF_{s,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial DEF_{s,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial DEF_{s,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ST \times ST}$$

onde $\frac{\partial g_{s,1}}{\partial DEF_{s,1}} = \frac{\partial g_{s,2}}{\partial DEF_{s,2}} = \dots = \frac{\partial g_{s,T}}{\partial DEF_{s,T}}$ e

$$\frac{\partial g_{s,1}}{\partial DEF_{s,1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{1,1}}{\partial DEF_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial g_{2,1}}{\partial DEF_{2,1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{\partial g_{S,1}}{\partial DEF_{S,1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S \times S}$$

sendo $\frac{\partial g_{s,t}}{\partial DEF_{s,t}} = -1$ para subsistemas e per\u00edodos iguais. Dessa forma, tem-se uma matriz oposta a matriz identidade:

$$\frac{\partial g_{s,1}}{\partial DEF_{s,1}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S \times S}$$

A.3.4 Derivada em relação a V

Em relação ao volume, tem-se:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial V_{r,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{1,1}} & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{1,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{R,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{1,T}} & \dots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{R,T}} \\ \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{1,1}} & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{1,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{R,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{1,T}} & \dots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{R,T}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{s,T-1}}{\partial V_{1,1}} & \frac{\partial g_{s,T-1}}{\partial V_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T-1}}{\partial V_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,T-1}}{\partial V_{1,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T-1}}{\partial V_{R,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T-1}}{\partial V_{1,T}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T-1}}{\partial V_{R,T}} \\ \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{1,1}} & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{2,1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{1,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{R,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{1,T}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{R,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ST \times RT}$$

A variável $V_{r,t}$ aparece na derivada do período t e do período $t + 1$:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial V_{r,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{1,1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial V_{R,1}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{1,1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{1,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial V_{R,2}} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g_{s,3}}{\partial V_{1,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,3}}{\partial V_{R,2}} & \frac{\partial g_{s,3}}{\partial V_{1,3}} & \dots & \frac{\partial g_{s,3}}{\partial V_{R,3}} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{1,T-1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{1,T-1}} & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{1,T}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial V_{R,T}} \end{bmatrix}$$

onde $\frac{\partial g_{s,t}}{\partial V_{r,t-1}} = \frac{\partial g_{s,t}}{\partial V_{r,t}}$, $t = 2, 3, \dots, T$ para cada usina r pertencente ao subsistema s .

• Caso perda linear ou quadrática:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial V_{r,t}} = -\frac{1}{2}(k_r QC_{r,t})\{c_{1r} + 2c_{2r}Vmed_{r,t} + 3c_{3r}(Vmed_{r,t})^2 + 4c_{4r}(Vmed_{r,t})^3\}$$

• Caso perda em função da altura bruta:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial V_{r,t}} = -\frac{1}{2}\{(1 - c_r)k_r QC_{r,t}\}\{c_{1r} + 2c_{2r}Vmed_{r,t} + 3c_{3r}(Vmed_{r,t})^2 + 4c_{4r}(Vmed_{r,t})^3\}$$

A.3.5 Derivada em relação a QVT

Em relação à QVT , tem-se:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QVT_{r,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{R,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{1,T}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{R,T}} \\ \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{R,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{1,T}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{R,T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{R,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{1,T}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{R,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ST \times RT}$$

A variável $QVT_{r,t}$ aparece na derivada no período t :

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QVT_{r,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QVT_{R,1}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QVT_{R,2}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{1,T}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QVT_{R,T}} \end{bmatrix}$$

• Caso perda linear ou quadrática:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QVT_{r,t}} = k_r QC_{r,t} \{d_{1r} + 2d_{2r} Q_{r,t} + 3d_{3r} (Q_{r,t})^2 + 4d_{4r} (Q_{r,t})^3\}$$

para cada usina r do subsistema s .

• Caso perda em função da altura bruta:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QVT_{r,t}} = (1 - c_r) k_r QC_{r,t} \{d_{1r} + 2d_{2r} Q_{r,t} + 3d_{3r} (Q_{r,t})^2 + 4d_{4r} (Q_{r,t})^3\}$$

para cada usina r do subsistema s .

A.3.6 Derivada em relação a QC

Em relação à QC , tem-se:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QC_{r,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{R,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{1,T}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{R,T}} \\ \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{R,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{1,T}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{R,T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{R,1}} & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{R,2}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{1,T}} & \cdots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{R,T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ST \times RT}$$

A variável $QC_{r,t}$ aparece na derivada no período t :

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QC_{r,t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{1,1}} & \dots & \frac{\partial g_{s,1}}{\partial QC_{R,1}} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{1,2}} & \dots & \frac{\partial g_{s,2}}{\partial QC_{R,2}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{1,T}} & \dots & \frac{\partial g_{s,T}}{\partial QC_{R,T}} \end{bmatrix}$$

•Caso perda linear:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QC_{r,t}} = -k_r[\phi_r(Vmed_{r,t}) - c_r - \theta_r(Q_{r,t}) - QC_{r,t}\{d_{1r} + 2d_{2r}Q_{r,t} + 3d_{3r}(Q_{r,t})^2 + 4d_{4r}(Q_{r,t})^3\}]$$

para cada usina r do subsistema s .

•Caso perda quadrática:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QC_{r,t}} = -k_r[\phi_r(Vmed_{r,t}) - 3c_r(QC_{r,t})^2 - \theta_r(Q_{r,t}) - QC_{r,t}\{d_{1r} + 2d_{2r}Q_{r,t} + 3d_{3r}(Q_{r,t})^2 + 4d_{4r}(Q_{r,t})^3\}]$$

para cada usina r do subsistema s .

•Caso perda em função da altura bruta:

$$\frac{\partial g_{s,t}}{\partial QC_{r,t}} = -k_r(1 - c_r)[\phi_r(Vmed_{r,t}) - \theta_r(Q_{r,t}) - QC_{r,t}\{d_{1r} + 2d_{2r}Q_{r,t} + 3d_{3r}(Q_{r,t})^2 + 4d_{4r}(Q_{r,t})^3\}]$$

para cada usina r do subsistema s .